Pontificia Universidad Católica de Chile

Mecánica Clásica

Fabián Cádiz Samuel A. Hevia Sebastián A. Reyes

Figuras: Pía Homm Diagramación: María José Vandeputte

Mecánica Clásica

Fabián Cádiz, Samuel A. Hevia, Sebastián A. Reyes.

Figuras: Pía Homm

Diagramación: María José Vandeputte

Departamento de Física

Pontificia Universidad Católica de Chile

18 de junio de 2013

Prólogo

Este texto de estudio fue elaborado teniendo en mente a estudiantes avanzados de enseñanza media o que estén prontos a ingresar a su primer año de Universidad. Se presentan en forma concisa gran parte de los contenidos de Mecánica Clásica que se espera un alumno domine antes de comenzar su primer curso avanzado de "Mecánica Clásica" de nivel universitario. Es importante mencionar que, aunque se introducen y utilizan conceptos básicos de Cálculo, no es necesario contar con conocimiento previo en esta materia. Se espera, eso sí, que el lector tenga conocimientos básicos de trigonometría y vectores. Como apoyo para reforzar este último tema, hemos incluído un Apéndice que resume los conceptos básicos de vectores que serán utilizados a lo largo del texto.

La metodología del libro es simple y se basa en nuestro convencimiento de que la mejor manera de aprender Mecánica Clásica es ejercitando y resolviendo problemas en forma reflexiva. Los contenidos e ideas básicas se presentan en forma breve, utilizando ejemplos ilustrativos cuando es necesario. Al final de cada capítulo se desarrollan diversos problemas escogidos cuidadosamente por su valor pedagógico. Estos ejercicios deben ser considerados como parte fundamental (y no opcional) del proceso de estudio. Cabe señalar que los ejemplos y problemas presentados en este texto tienen orígenes diversos. Algunos se diseñaron exclusivamente para este libro, otros fueron inventados por los autores con anterioridad, y los restantes son ejercicios "clásicos" cuya autoría es difícil de determinar.

Antes de comenzar es bueno hacer algunas recomendaciones básicas que creemos le ayudarán a hacer el proceso de aprendizaje provechoso y entretenido:

1. Las ideas básicas de la Mecánica Newtoniana se pueden enunciar y explicar en pocas páginas. Esto *no* quiere decir que sean fáciles de aprender. De hecho, es

natural que para llegar a una plena comprensión y dominio de los conceptos se requiera de mucho tiempo de reflexión y práctica.

2. Desarrolle los problemas planteados reflexionando y entendiendo todos los pasos. ¡No sirve copiar o transcribir problemas para memorizar! En el proceso de aprendizaje hay tres elementos muy importantes: pensar, pensar y pensar.

3. ¡Ánimo, la recompensa es grande! La Mecánica Clásica no sólo es una de las teorías científicas más exitosas y utilizadas, sino que además es una bella y fascinante descripción de la Naturaleza.

Estamos seguros de que en esta primera versión del texto existe un amplio margen para mejorar y el aporte de los lectores será fundamental en este proceso. Los invitamos a participar con sus comentarios y sugerencias en **www.librodefisica.cl**.

Por último, queremos agradecer el apoyo del Departamento de Física, de la Dirección Académica de Docencia y de la Facultad de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica de Chile. En particular, queremos agradecer el apoyo de Mauricio López y los constructivos comentarios y observaciones de Ángel Abusleme, Piero Ferrari y Alejandra Sánchez.

Fabián Cádiz, Samuel A. Hevia, Sebastián A. Reyes

Santiago, 18 de junio de 2013.

1 Cinemática

El propósito de la mecánica clásica es describir el movimiento de los cuerpos y entender sus causas, una de las inquietudes más antiguas de la humanidad. En este primer capítulo nos concentraremos en la *cinemática*, es decir, en la descripción del movimiento sin preocuparnos por sus causas. Para esto introduciremos algunos conceptos y herramientas matemáticas que nos permitirán hacer esta descripción de manera completa y rigurosa[1].

Para este tipo de análisis muchas veces es adecuado pensar en el objeto en cuestión como un punto ubicado en su centro, cuya posición puede variar en el tiempo. Tal es el caso, por ejemplo, de la descripción del movimiento de una bala, de un automóvil, de una persona corriendo o incluso del movimiento de los planetas alrededor del sol.

En lo que sigue introduciremos conceptos básicos como desplazamiento, velocidad y aceleración, que serán de gran importancia a lo largo de todo el texto.

1.1 Cinemática en una dimensión

Para comenzar estudiaremos ciertos tipos de movimiento que pueden ser descritos por una sola coordenada, llamados unidimensionales. Sabemos que nuestro mundo es tridimensional y esto podría parecer una sobre simplificación, pero veremos que el estudio del movimiento en una dimensión será de gran utilidad para resolver una amplia variedad de problemas interesantes. Además, muchas de las ideas que se pre-

[1] Las causas del movimiento las estudiaremos en el siguiente capítulo.

sentan aquí serán fácilmente generalizadas para los casos en donde el movimiento ocurre en más dimensiones.

Consideremos entonces un objeto que se mueve en una línea recta. En primer lugar definimos un eje "x" de referencia paralelo a la dirección del objeto en movimiento, y cuyo origen ($x = 0$) definimos arbitrariamente. Una vez hecho esto, la trayectoria (o itinerario) del móvil queda completamente descrita por una función del tiempo $x(t)$ que nos entrega la posición del objeto para cada instante de tiempo t, cuyo origen ($t = 0$) también es escogido arbitrariamente.

Por ejemplo, supongamos que queremos describir la trayectoria que sigue el velocista Usain Bolt al correr una carrera de cien metros planos. Para esto definamos un eje "x" que pasa justo por el carril de Bolt y cuyo origen está en el punto de partida de la carrera. Elijamos además el sentido positivo de este eje apuntando en la dirección en que se desplazan los corredores, como se muestra en la Fig. 1.1. La elección de un eje y su origen es lo que llamaremos **sistema de referencia**.

Figura 1.1: Usain Bolt se prepara para romper el Record mundial de cien metros planos. Para describir su movimiento hemos escogido un eje X que pasa por el carril del corredor.

Consideraremos el origen del tiempo como el instante t_0 en que suena el disparo y comienza la carrera ($t_0 = 0$). Sabemos que en ese momento la posición del corredor es $x(t_0) = 0$ m, y usando las imágenes de televisión podemos ver, por ejemplo, que su posición a los 3 segundos de haber comenzado la carrera es $x(t_1 = 3\text{ s}) = 22.5$ m y que a los 8 segundos después del comienzo de la carrera su posición es $x(t_2 = 8\text{ s}) = 81.7$ m. Podemos imaginar entonces que si llevamos un registro de la posición para distintos instantes de tiempo, la trayectoria del corredor queda representada por los puntos que se ven en la Fig. 1.2.

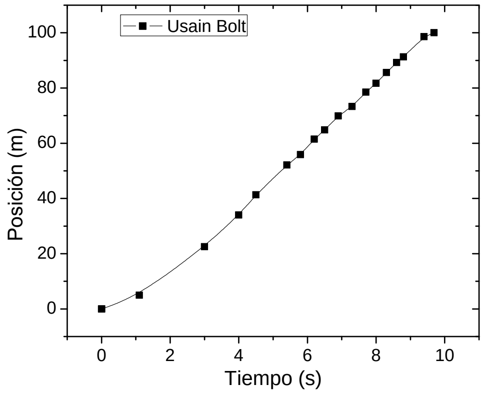


Figura 1.2: En el gráfico vemos puntos que representan la posición de Bolt en distintos instantes de tiempo. Si fuéramos capaces de medir la posición en cada instante de tiempo, obtendríamos la línea continua que representa matemáticamente la trayectoria seguida por Usaín Bolt al recorrer los cien metros planos.

La línea continua que se muestra en la Fig. 1.2 representa una función del tiempo, $x(t)$, que da la posición de Bolt en cada instante de tiempo t. Toda la información relevante al movimiento del corredor está contenida en esta función $x(t)$ que llamaremos función posición.

Introduzcamos ahora algunos conceptos básicos de cinemática.

Desplazamiento 1.1.1

Si la posición de un objeto en los tiempos t_1 y t_2 corresponde, respectivamente, a las coordenadas $x(t_1)$ y $x(t_2)$, definimos el desplazamiento entre t_1 y t_2 como la diferencia entre las posiciones respectivas en dichos instantes:

$$\boxed{d_{21} = x(t_2) - x(t_1)} \tag{1.1}$$

El desplazamiento tiene dimensiones de longitud y en el sistema internacional de unidades (S.I) [2] lo medimos en metros [m]. Por ejemplo, el desplazamiento de Bolt entre los tiempos especificados anteriormente es $d_{21} = x(t_2) - x(t_1) = 59.2$ m.

[2]El S.I es el sistema de unidades que se usa en la mayoría de los países. Un metro (m) es la unidad de longitud, y la unidad de tiempo es el segundo (s).

Velocidad Media 1.1.2

La velocidad media (o promedio) sobre un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ corresponde al desplazamiento dividido por el intervalo de tiempo en el que éste ocurrió:

$$\boxed{\bar{v}_{21} = \frac{d_{21}}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}} \tag{1.2}$$

Notemos que la velocidad media entre dos instantes puede ser pequeña a pesar de que el objeto haya recorrido una gran distancia entre t_1 y t_2. En particular, si éste recorre una larga trayectoria y vuelve a su posición original, su velocidad media en ese intervalo de tiempo será cero. En ese sentido, la velocidad media es insensible a la historia que ocurre entre t_1 y t_2. La velocidad tiene dimensiones de longitud dividida por tiempo y en el S.I. se mide en [m/s]. Por ejemplo, podemos calcular la velocidad media de Bolt entre $t_1 = 3$ *s* y $t_2 = 8$ *s*, que es $\bar{v}_{21} = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) = 11.4$ m/s.

Velocidad Instantánea 1.1.3

Como vimos anteriormente, la velocidad media nos permite estimar cuánto vale el desplazamiento por unidad de tiempo. Pero para esto nos bastó calcular un promedio en un intervalo de tiempo dado, pero todo detalle de lo que ocurre dentro de ese intervalo no es tomado en cuenta. Imaginemos ahora que dicho intervalo de tiempo se vuelve muy pequeño en torno a un cierto valor del tiempo t, hablamos entonces de una velocidad asociada a dicho instante de tiempo, $v(t)$. A esta cantidad la llamamos velocidad instantánea y queda expresada matemáticamente por:

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}} \tag{1.3}$$

En esta ecuación el símbolo $\lim_{\Delta t \to 0}$ significa “límite cuando Δt se aproxima a 0”. Es decir, la velocidad instantánea en el instante t corresponde a la velocidad media en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$, cuando Δt es infinitamente pequeño. En este punto es importante hacer un pequeño paréntesis para introducir el concepto de la derivada de una función.

El concepto de la derivada 1.1.4

En la figura 1.3 hemos representado una trayectoria arbitraria (en rojo) de un objeto puntual en términos de su función posición $x(t)$. Fijemos nuestra atención en un trozo de esta función entre dos tiempos particulares t_0 y $t_0 + \Delta t$. De esta figura podemos notar que la cantidad $\Delta x/\Delta t$, definida como:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \tag{1.4}$$

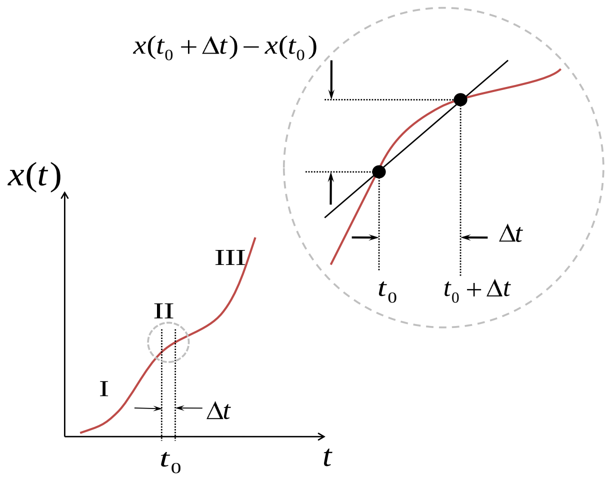


Figura 1.3: La velocidad media entre t_0 y $t_0+\Delta t$ corresponde a la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(t_0, x(t_0))$ y $(t_0+\Delta t, x(t_0+\Delta t))$.

corresponde a la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(t_0, x(t_0))$ y $(t_0+\Delta t, x(t_0+\Delta t))$. A medida que el tamaño del intervalo de tiempo Δt se hace más pequeño, la pendiente de la recta se asemeja cada vez más a la pendiente de la recta tangente a la curva en $x(t_0)$. Por lo tanto, si tomamos $\Delta t \to 0$ ambas pendientes serán iguales y la anotaremos como sigue:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}. \tag{1.5}$$

Notemos que al variar t_0 obtenemos distintos valores para 1.5, dicho de otra forma, 1.5 es una función del tiempo t. Esta nueva función es lo que se conoce como **derivada** de $x(t)$. El símbolo $\frac{dx}{dt}$ es la notación comúnmente utilizada para denotar la derivada, y como notación simplificada es común utilizar $x'(t)$ o también $\dot{x}$. Observe que el lado derecho de la ecuación 1.5 es justamente la definición de velocidad instantánea en el instante t_0. Por lo tanto, la velocidad de un objeto en un instante t corresponde justamente a la derivada de la función que define la trayectoria de ese objeto evaluada en el instante t.

¿ENTENDISTEST? 1.1

¿En cuál de las zonas definidas como I, II y III en la figura 1.3, el móvil tiene una mayor velocidad instantánea?

Rapidez 1.1.5

Cuando un objeto recorre una determinada trayectoria entre dos instantes t_1 y t_2, nos podemos preguntar, ¿que tan rápido se movió? (sin importar la dirección del movimiento). Para responder esta pregunta es adecuado definir la rapidez media entre t_1 y

t_2 como:

$$\boxed{\bar{r}_{21} = \frac{s_{21}}{t_2 - t_1}} \tag{1.6}$$

donde s_{21} es la longitud total de la trayectoria recorrida entre t_1 y t_2. Análogamente al caso de la velocidad, también se puede definir la rapidez instantánea en un instante de tiempo t al considerar un Δt infinitesimal alrededor de t.

Es importante darnos cuenta de que este concepto es diferente al de "velocidad". En efecto, la rapidez media es una cantidad siempre positiva o nula (cuando no hay ningún movimiento en absoluto). Por ejemplo, si una persona corre cien metros en línea recta y luego corre de regreso al punto de partida, demorándose 40 s en todo el proceso, entonces la rapidez media para este recorrido es $r = 200\ \text{m}/40\ \text{s} = 5\ \text{m/s}$. Sin embargo, como el punto final de la trayectoria es el mismo que el inicial, su velocidad media claramente será nula.

La diferencia esencial entre rapidez y velocidad es que sólo esta última es sensible a los cambios de dirección, que es una propiedad fundamental de la velocidad, así como de la posición y la aceleración.[3] De acuerdo con la definición de rapidez, es fácil darse cuenta que la rapidez instantánea corresponde al módulo de la velocidad instantánea[4] $r(t) = |x'(t)|$.

Aceleración Media 1.1.6

Otro concepto necesario para describir adecuadamente el movimiento de un objeto es la aceleración. Ésta nos dice cuánto varía la velocidad por unidad de tiempo. La aceleración media entre t_1 y t_2 se define como:

$$\boxed{\bar{a}_{21} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}} \tag{1.7}$$

Es importante destacar que, análogamente a la velocidad media, el objeto puede ser sometido a grandes variaciones de velocidad durante el intervalo de tiempo considerado y sin embargo el valor medio de la aceleración puede ser pequeño. Para determinar la aceleración media solo son necesarias las velocidades final e inicial, y el intervalo de tiempo. La aceleración tiene dimensiones de velocidad dividida por tiempo y en el S.I se mide en [m/s^2].

Por ejemplo, el 14 de Octubre de 2012, el paracaidista Felix Baumgartner realizó un salto desde 39000 metros de altura, logrando romper la barrera del sonido (velocidad de 1137 kilómetros por hora, o equivalentemente, 315,8 m/s) luego de 40 segundos

[3] Como veremos más adelante cuando el movimiento es en más de una dimensión se vuelve esencial el uso de *vectores* para una adecuada descripción de estas magnitudes físicas. (Ver Apéndice A)

[4] El módulo o valor absoluto de un número real x se define como $|x| = x$ si $x \geq 0$, ó $|x| = -x$ si $x < 0$.

de caída libre. Suponiendo que cuando se deja caer su velocidad vertical es nula, la aceleración media al cabo de 40 segundos fue de:

$$a = \frac{315,8 - 0}{40 - 0} = 7,9 \ \frac{m}{s^2}$$

El lector que ya está familiarizado con la gravitación reconocerá una diferencia entre esta aceleración media y la aceleración de gravedad, $g = 9.81 \ \frac{m}{s^2}$, que en principio experimentan todos los objetos que caen hacia la superficie de la Tierra. En efecto, el contacto del paracaidista con el aire a su alrededor es el responsable de esta menor aceleración.

Aceleración Instantánea 1.1.7

De manera similar a lo visto anteriormente cuando definimos el concepto de velocidad instantánea, definiremos la aceleración instantánea como la aceleración media para un intervalo de tiempo infinitamente pequeño alrededor del instante en el cual deseamos calcularla. Es decir,

$$\boxed{a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt}} \tag{1.8}$$

Note que la aceleración corresponde a la segunda derivada de la posición, entonces: $a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}(\frac{dx(t)}{dt}) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$. Y en notación simplificada se tiene que $a(t) = x''(t)$, o también $a(t) = \ddot{x}$.

A continuación veremos como describir dos tipos de movimientos característicos, el movimiento con velocidad constante y el movimiento con aceleración constante.

Movimiento con velocidad constante (o no acelerado) 1.1.8

El caso más sencillo consiste en el movimiento de un objeto cuya velocidad es constante, es decir, independiente del tiempo (esto es equivalente a decir que la aceleración es nula). Esto significa que en iguales intervalos de tiempo recorre la misma distancia. Si escogemos un cierto origen para la coordenada x que describe el movimiento, y digamos que conocemos la posición inicial para $t = 0$, ¿cómo podemos determinar la posición $x(t)$ para un instante posterior t (arbitrario)?.

Por el momento únicamente sabemos que su velocidad está dada por una constante que llamaremos v_0. Notemos que para cualquier intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ la velocidad media es necesariamente igual a v_0:

$$\overline{v}_{t_1 t_2} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = v_0$$

Llamaremos x_0 a la posición del objeto en el instante $t = 0$. Luego, para algún tiempo t, se tiene que la velocidad entre 0 y t es:

$$v_0 = \frac{x(t) - x_0}{t - 0}$$

de donde obtenemos:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t} \tag{1.9}$$

Esta es la descripción general de cualquier movimiento unidimensional a velocidad constante. Notemos que como la velocidad es constante, tanto la aceleración media sobre cualquier intervalo de tiempo como la aceleración instantánea para un instante t cualquiera son nulas. Movimiento a velocidad constante es entonces sinónimo de movimiento no acelerado.

Si se grafica la posición x de la partícula en función de t, obtenemos una línea recta como se ve en la Fig. 1.4.

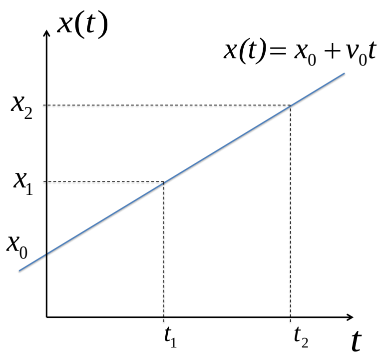


Figura 1.4: El gráfico de la posición v/s tiempo para un movimiento a velocidad constante corresponde a una recta. La pendiente de esta recta es igual a la velocidad de la partícula.

Notemos que esto es consistente con el hecho de que la velocidad es igual a la pendiente de la recta tangente a $x(t)$. En este caso, la recta tangente a $x(t)$ es igual a $x(t)$, cuya pendiente es constante e igual a v_0.

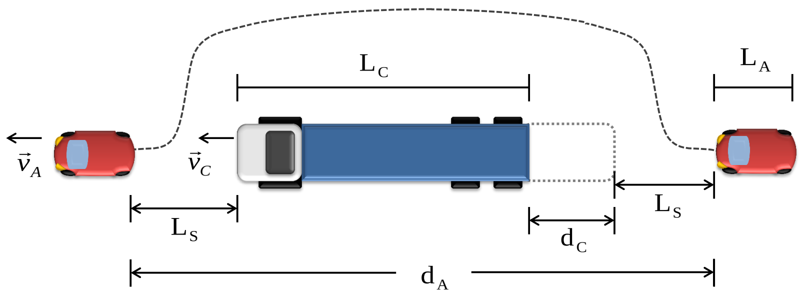
A partir de la Ecuación 1.9, podemos determinar por ejemplo el tiempo t que demora un objeto en recorrer una distancia Δx como:

$$t = \frac{\Delta x}{v_0}$$

Ejemplo 1.1

Considere un automóvil de 4 m de largo que viaja con una rapidez constante de 120 km/h por una carretera recta de una pista por sentido de tránsito. Por el mismo carril y más adelante viaja un camión de 16 m de largo a una velocidad de 100 km/h. En un instante dado, el conductor del automóvil ve al camión y decide realizar una maniobra de adelantamiento manteniendo la rapidez del auto constante. ¿Cuál es el mínimo intervalo de tiempo que debe estar el automóvil en el carril contrario para realizar esta maniobra de forma segura? Considere que la maniobra es segura cuando la distancia paralela a la carretera entre el auto y el camión es mayor a 5 m. Además desprecie el desplazamiento lateral.

Solución: La maniobra de adelantamiento puede ser descrita en tres etapas. Primero se realiza el cambio de carril, luego el sobrepaso por un costado del otro vehículo y finalmente el cambio al carril original. Para representar gráficamente esta situación dibujaremos los vehículos en el instante inicial y final de la maniobra en la figura siguiente:



El trayecto d_A que recorre el automóvil está dado por:

$$d_A = L_C + L_A + 2L_S + d_C \tag{1.10}$$

donde d_C es la distancia que recorre el camión durante la maniobra. Por lo tanto, el tiempo mínimo que debe estar el automóvil en el carril contrario es:

$$t_m = \frac{d_A}{v_A} \tag{1.11}$$

La distancia d_C que recorre el camión es:

$$d_C = v_C t_m \tag{1.12}$$

Luego, reemplazando 1.11 y 1.12 en 1.10, se obtiene:

$$v_A t_m = L_C + L_A + 2L_S + v_C tm \tag{1.13}$$

Despejando, obtenemos que el tiempo está dado por:

$$t_m = \frac{L_C + L_A + 2L_S}{v_A - v_C} \tag{1.14}$$

Análisis del Resultado

Si $v_A = v_C \Longrightarrow t \rightarrow \infty$, lo cual es de esperar, ya que si el automóvil viaja a una velocidad muy cercana a la del camión, el tiempo que tarda en adelantarlo será muy grande. En particular, si las velocidades son iguales, este resultado indica que no es posible el adelantamiento.

Note además que el resultado sólo depende de la diferencia de las velocidades. Esto indica que el tiempo es el mismo que si el camión está detenido y el auto se desplaza a 20 km/h.

Obteniendo un valor numérico: Para evaluar los datos en 1.14 es recomendable realizar un cambio de unidades, desde km/h a m/s.

$$1\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1000\text{ m}}{3600\text{ s}}$$
$$1\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1\text{ m}}{3,6\text{ s}}$$

Como nos interesa la diferencia de las velocidades, se tiene que:

$$v_A - v_C = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}} - 100\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$
$$v_A - v_C = \frac{20}{3,6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Evaluando en 1.14:

$$t = \frac{16\text{ m} + 4\text{ m} + 10\text{ m}}{\frac{20}{3,6}\frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad \rightarrow \quad t = 5,4\text{ s}$$

Por lo tanto, el tiempo mínimo requerido para realizar la maniobra de adelantamiento en forma segura es 5,4 s.

Movimiento con aceleración constante 1.1.9

Ahora veamos el caso en que existe una aceleración constante en el tiempo, es decir, $a(t) = a$. Esto significa que la aceleración media sobre cualquier intervalo de tiempo es constante e igual a a. Si la velocidad inicial en $t = 0$ es v_0, entonces:

$$\overline{a}_{0,t} = \frac{v(t) - v_0}{t - 0} = a_0 \tag{1.15}$$

y obtenemos que la velocidad varía en el tiempo de acuerdo a la ecuación:

$$\boxed{v(t) = v_0 + at} \tag{1.16}$$

Notemos que esto último es fácil de deducir pues la relación que existe entre $v(t)$ y $a(t)$ es absolutamente análoga a la relación entre $x(t)$ y $v(t)$. Por lo tanto, nos basta recordar el resultado obtenido para $x(t)$ en el caso de velocidad constante (Ecuación 1.9).

Para el movimiento con aceleración constante la velocidad varía de manera uniforme, por lo que al graficar la velocidad en función del tiempo se obtiene una línea recta como vemos en la Fig. 1.5.

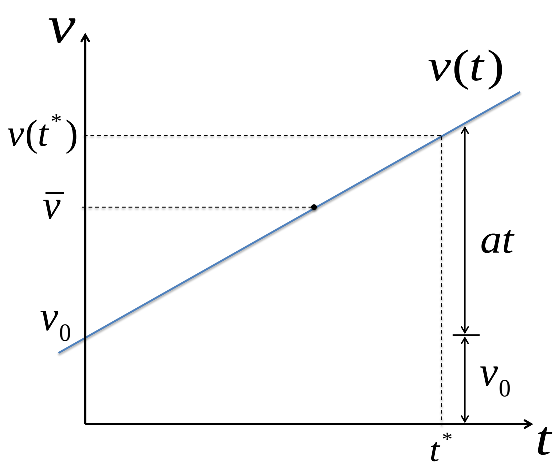


Figura 1.5: Velocidad en función del tiempo para el movimiento uniformemente acelerado.

Ahora, supongamos además que para $t = 0$ la partícula se encuentra en x_0, de manera que después de un tiempo t, se encontrará en:

$$x(t) = x_0 + \overline{v}_{0,t}t, \tag{1.17}$$

donde $\overline{v}_{0,t}$ es la velocidad media en el intervalo $[0, t]$. Pero, como la aceleración es constante, podemos obtener la velocidad media calculando el promedio entre la velocidad inicial y la velocidad final. Es decir,

$$\overline{v}_{0,t} = \frac{1}{2}[v_0 + v(t)] = \frac{1}{2}[v_0 + v_0 + at] \tag{1.18}$$

$$\overline{v}_{0,t} = v_0 + at/2 \tag{1.19}$$

Reemplazando en la ecuación 1.17, obtenemos la ecuación que describe el movimiento de una partícula que se mueve con aceleración constante:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + at^2/2} \tag{1.20}$$

Por otra parte, de la ecuación para la velocidad, podemos despejar t como:

$$t = \frac{v(t) - v_0}{a}. \tag{1.21}$$

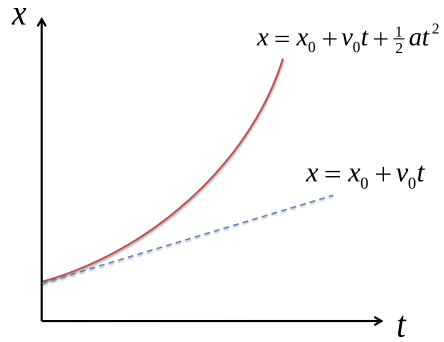


Figura 1.6: El gráfico de la posición v/s tiempo para un movimiento con aceleración constante corresponde a una parábola.

Si ahora lo reemplazamos en la expresión que obtuvimos para $x(t)$ tenemos:

$$x(t) = x_0 + v_0 \left(\frac{v(t) - v_0}{a} \right) + \frac{a}{2} \left(\frac{v(t) - v_0}{a} \right)^2 \tag{1.22}$$

Trabajando sobre esta ecuación obtenemos una expresión que relaciona la velocidad con la posición en un instante de tiempo t,

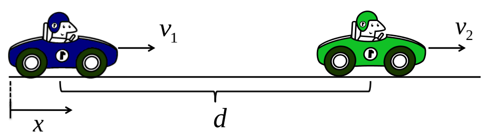
$$\boxed{v(t)^2 - v_0^2 = 2a(x(t) - x_0)} \tag{1.23}$$

Ejemplo 1.2

Eliseo, un piloto de fórmula uno, corre a una velocidad v_1 cuando se percata que d metros más adelante y en la misma pista, va otro auto que se mueve más lentamente a una velocidad constante $v_2 < v_1$. Eliseo aplica los frenos y da a su automóvil una aceleración constante $(-a)$ (contraria a la dirección de movimiento). Demostrar que si la distancia que los separa cumple $d > (v_2 - v_1)^2/2a$, no habrá choque.

Solución

En el instante en que Eliseo nota el acercamiento con el otro automóvil, los separa una distancia d. Elegimos un sistema de referencia cuyo origen coincide con la posición del automóvil de Eliseo en el instante en que comienza a frenar.



De esta forma, las ecuaciones de movimiento que describen las trayectorias de Eliseo ($x_1(t)$) y del otro piloto ($x_2(t)$) son:

$$x_1(t) = v_1 t - a\frac{t^2}{2}$$

$$x_2(t) = d + v_2 t$$

Si se produce un choque, quiere decir que para algún tiempo t' las posiciones de ambos automóviles deberían coincidir:

$$v_1 t' - a\frac{t'^2}{2} = d + v_2 t'$$

Escrito de otra manera:

$$\frac{a}{2}t'^2 + (v_2 - v_1)t' + d = 0$$

Hemos obtenido una ecuación de segundo grado para el tiempo t', cuyas soluciones están dadas por:

$$t' = \frac{v_1 - v_2 \pm \sqrt{(v_2 - v_1)^2 - 2ad}}{a}$$

Notemos que si:

$$(v_2 - v_1)^2 - 2ad < 0$$

entonces las soluciones para t' son imaginarias, lo que carece de sentido físico. Esto quiere decir que bajo esta condición no existe una solución (real) para t', y entonces no habrá choque. Es decir, debe cumplirse:

$$\frac{(v_2 - v_1)^2}{2a} < d$$

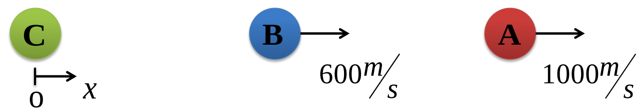
Aplicación numérica: Supongamos que Eliseo viaja inicialmente a $v_1 = 300$ km/h, que el otro auto se mueve a 200 km/h, y que los separa una distancia de 200 m. Para evitar un desastre la desaceleración debe cumplir con:

$$a > \frac{(v_2 - v_1)^2}{2d} = 1,929 \text{ ms}^{-2}.$$

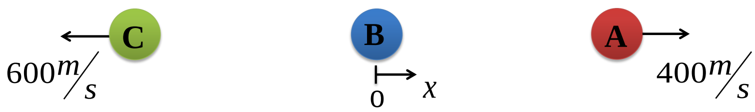
Movimiento Relativo 1.1.10

El concepto de velocidad está estrechamente relacionado con el concepto de sistema de referencia. Por ejemplo, cuando decimos que un vehículo viaja a 100 km/h en dirección norte, mentalmente asociamos la dirección del desplazamiento y asumimos que los 100 km/h son medidos respecto a un observador que está en tierra, ya que entendemos que es la única manera de que esta afirmación tenga sentido. Por ello, cuando nos referimos a la velocidad de un objeto, es necesario definir respecto a qué sistema de referencia se mide el desplazamiento de éste y en qué orientación espacial se desplaza. Por lo tanto, se debe establecer un sistema de referencia y la orientación de sus coordenadas.

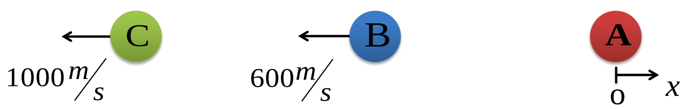
Por ejemplo, podríamos definir dos sistemas de referencia, tales que sus orígenes se desplacen el uno respecto del otro con una velocidad constante. Estos dos sistemas serían igualmente adecuados para describir el movimiento de un objeto. A modo de ejemplo, consideremos tres meteoritos *A*, *B* y *C* que viajan por el espacio en una misma dirección. Si decimos que el meteorito *A* tiene una rapidez mayor que el meteorito *B*, y este último una rapidez mayor que *C*, intuitivamente estamos definiendo un sistema de referencia en el cual ello ocurre. Para aclarar esto último, partamos considerando un sistema que tiene su origen en el meteorito *C*, desde el cual se ve que *B* y *A* se están alejando y este último lo hace con mayor velocidad. En este sistema de referencia las velocidades de *A* y *B* serían 1000 m/s y 600 m/s, tal como se representa en la figura siguiente (las flechas indican la dirección del movimiento de cada meteorito):



Ahora, consideremos un sistema de referencia con su origen en el meteorito *B*.



Por último, fijemos el sistema de referencia en el meteorito *A*.



Al observar los tres casos anteriores, podemos decir que el meteorito *A* se aleja del meteorito *C* con una rapidez de 1000 m/s (primer sistema de referencia), o equivalentemente, que el meteorito *C* se aleja del meteorito *A* con una rapidez de 1000 m/s (tercer sistema de referencia). En la tabla 1.1 se muestran las diferencias de las velocidades calculadas en los tres sistemas de referencia.

Lo primero que queda en evidencia en la tabla anterior es que la diferencia de las velocidades, que llamamos velocidad relativa, es **independiente** del sistema de referencia. Por ejemplo, la velocidad relativa del meteorito *A* respecto al meteorito *B* sería $v_{AB} = v_A - v_B$, que tiene un valor de 400 m/s en dirección x (por tener signo positivo), o sea, *A* se aleja de *B* a 400 m/s en la dirección positiva de la coordenada x. Análogamente, la cantidad $v_{BA} = v_B - v_A$ nos indica que *B* se aleja de *A* a 400 m/s en la

Sistema de referencia	$v_A - v_B$	$v_B - v_A$	$v_A - v_C$	$v_C - v_A$	$v_B - v_C$	$v_C - v_B$
En A	400	-400	1000	-1000	600	-600
En B	400	-400	1000	-1000	600	-600
En C	400	-400	1000	-1000	600	-600

Tabla 1.1: La velocidad relativa entre 2 objetos es siempre la misma, independiente del sistema de referencia.

dirección negativa de la coordenada x.

En el problema de la maniobra de adelantamiento a velocidad constante, encontramos que el tiempo que tarda el automóvil en adelantar al camión depende sólo de la diferencia de las velocidades. Este resultado indica que el tiempo que tarda el automóvil en adelantar el camión es independiente del sistema de referencia en el cual se calcula. O sea, si se observa la maniobra desde un tercer vehículo y se es capaz de medir las velocidades de los otros vehículos, al calcular el tiempo que tarda la maniobra éste debe ser el mismo que el calculado por un observador en tierra.

Estos resultados sugieren que dos sistemas de referencia que se mueven a velocidad constante uno respecto al otro son completamente equivalentes para describir el movimiento de los objetos (esto será discutido con más detalle en el capítulo 2). Vemos entonces que no existe una velocidad absoluta de un objeto, pues ésta siempre dependerá del sistema de referencia utilizado. Sin embargo, la velocidad relativa entre 2 objetos será la misma en todos los sistemas de referencia.

¿ENTENDISTEST? 1.2

Considere dos sistemas de referencia donde uno se mueve a una velocidad constante respecto al otro. Vimos que la velocidad de un objeto no será la misma en ambos sistemas de referencia, ¿qué ocurre con la aceleración?, ¿depende también del sistema de referencia?.

Cinemática en dos dimensiones 1.2

En esta sección estudiaremos el movimiento en dos dimensiones. Mostraremos cómo los conceptos vistos en la sección anterior son generalizados para este caso, en base al tratamiento vectorial de las cantidades involucradas. Veremos que es natural introducir el concepto de magnitud vectorial y notaremos cómo esto facilita el tratamiento de los distintos problemas.

Posición bidimensional, concepto de vector. 1.2.1

La posición de un objeto que se mueve en dos dimensiones queda completamente descrita al referirla respecto a un sistema de coordenadas bidimensional. A modo de ejemplo, imaginemos que le lanzamos una manzana al profesor en vez de dejarla de forma cortés en su mesa. El movimiento que realiza la manzana después de que ésta abandona la mano del lanzador es en dos dimensiones, ya que ella se desplaza horizontalmente a lo largo de la línea de lanzamiento, y además su posición vertical varía por la acción de la gravedad. Con el propósito de indicar la posición de la manzana en un instante de tiempo t posterior al lanzamiento, utilizaremos el sistema de referencia mostrado en la figura 1.7.

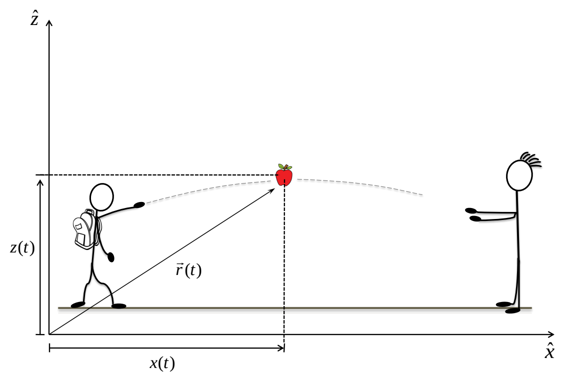


Figura 1.7: La trayectoria de la manzana no puede ser descrita por una sola coordenada. Se trata de un movimiento bidimensional.

Notamos que la ubicación de la manzana está determinada por el valor de su posición en la dirección horizontal que hemos llamado $x(t)$, y por la posición vertical $z(t)$. Por comodidad podemos agrupar ambas coordenadas, $x(t)$ y $z(t)$, para formar un **vector** $\vec{r}(t)$, al cual llamaremos vector posición (ver Apéndice A). En la figura 1.7, vemos que la posición de la manzana se representa por una flecha, que une el origen del sistema de referencia con la posición de la manzana. Esto no es otra cosa que el vector posición de la manzana en dicho instante. De forma general, un vector es un arreglo de varias coordenadas, y se representa siempre por una flecha en el espacio.

Note que el vector $\vec{r}(t)$ solo tiene sentido si lo hemos referido a un sistema de coordenadas. De la figura 1.7, podemos ver que este vector puede ser escrito matemáticamente de la siguiente manera:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + z(t)\hat{z} \tag{1.24}$$

donde $\hat{x}$ y $\hat{z}$ representan, respectivamente, las direcciones de los ejes X y Z. También se utiliza la notación simplificada $\vec{r}(t) = (x(t), z(t))$. Note que el nombre de los ejes es completamente arbitrario, aunque usualmente se utilizan los símbolos X, Y y Z para designar 3 direcciones en el espacio tridimensional. Otra notación que utilizada en muchos textos consiste en nombrar $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ a las direcciones $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$, respectivamente.

A medida que la manzana se mueve, tanto el módulo (largo de la flecha) como la dirección del vector posición varían, generando así una trayectoria en dos dimensiones. El módulo de un vector se calcula fácilmente con el teorema de Pitágoras, y se utiliza la siguiente notación :

$$\left\|\vec{r}(t)\right\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

Las direcciones $\hat{x}$, y $\hat{z}$ son, por construcción, vectores de módulo igual a 1.

Desplazamiento 1.2.2

También es conveniente definir el desplazamiento en el caso bidimensional como una cantidad vectorial, ya que para referirnos al desplazamiento del objeto debemos especificar cuánto se desplazó (módulo del vector) y en qué dirección lo hizo (dirección en la que apunta la flecha del vector). En el contexto del movimiento de la manzana (figura 1.8), podemos ver que el desplazamiento de ésta entre los tiempos t_1 y t_2 está dado por la ecuación 1.25, la cual es obtenida simplemente a partir de la resta de los dos vectores posición evaluados en los instantes involucrados.

$$\boxed{\vec{d}_{21} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)} \tag{1.25}$$

El desplazamiento es también un vector, que gráficamente une el punto $\vec{r}(t_1)$ con $\vec{r}(t_2)$. El desplazamiento de un objeto siempre puede ser escrito en términos del vector posición como en la ecuación 1.25. Note sin embargo que, a diferencia del vector posición, el vector desplazamiento no depende del sistema de referencia escogido. Esto puede ser observado directamente de la figura 1.9, en la cual hemos introducido otro sistema de referencia (direcciones $\hat{x}$-$\hat{y}$), respecto del cual se han representado los vectores posición $\vec{r}'(t_1)$ y $\vec{r}'(t_2)$ de la manzana en los mismos tiempos t_1 y t_2.

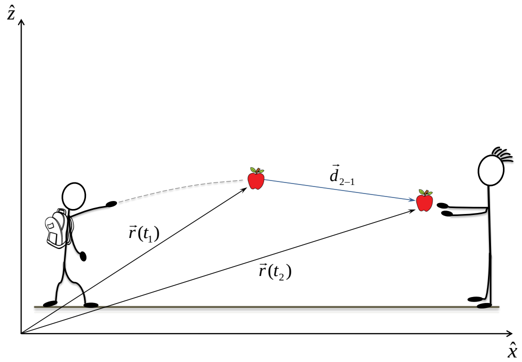


Figura 1.8: El desplazamiento entre t_1 yt_2 se define como la diferencia del vector posición evaluado en los instantes de tiempo t_1 y t_2.

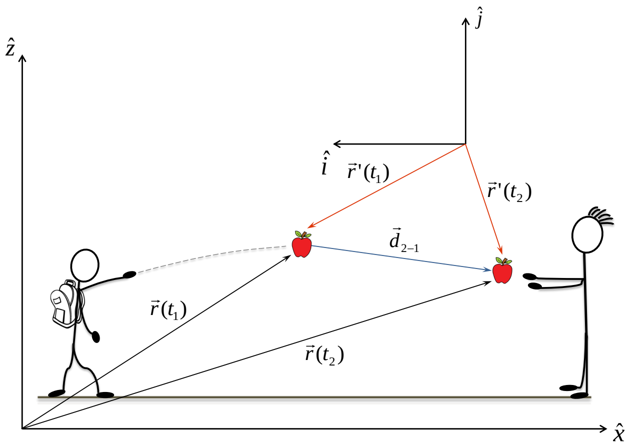


Figura 1.9: El desplazamiento de un objeto es un vector que no depende del sistema de referencia utilizado.

Velocidad Media 1.2.3

La velocidad media se define análogamente al caso unidimensional, donde el desplazamiento es ahora un vector:

$$\boxed{\bar{\vec{v}}_{21} = \frac{\vec{d}_{21}}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}} \tag{1.26}$$

Por supuesto, le velocidad media es independiente del sistema de referencia utilizado. Note que la dirección de la velocidad media es la misma que la del vector desplazamiento.

Velocidad Instantánea 1.2.4

Análogamente al caso unidimensional, la velocidad instantánea está dada por:

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)} \tag{1.27}$$

donde la derivada de $\vec{r}(t)$ se define simplemente como el vector cuyas componentes son las derivadas de las componentes del vector posición:

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)\hat{x} + z(t)\hat{z}\right) = \left(x'(t)\hat{x} + z'(t)\hat{z}\right) = \vec{v}(t)$$

En la siguiente figura se representan las velocidades de la manzana en dos instantes de tiempo t_1 y t_2 respectivamente. Es posible mostrar que el vector velocidad es siempre tangente a la curva que describe la trayectoria del objeto. Note que en general tanto la dirección como el módulo de la velocidad cambian.

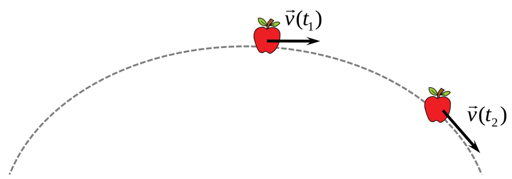


Figura 1.10: La velocidad de un objeto puede cambiar en magnitud (módulo), y también en dirección.

Rapidez 1.2.5

Nuevamente podemos generalizar el caso unidimensional para decir que la rapidez instantánea de un objeto está dada por:

$$\boxed{r(t) = \|\vec{v}(t)\|} \tag{1.28}$$

es decir, corresponde al módulo de la velocidad. (!Atención!, no confundir $r(t)$ con el vector posición $\vec{r}(t)$).

¿ENTENDISTEST? 1.3

Usualmente nos referimos al medidor de velocidad de un auto como velocímetro. ¿Según los conceptos definidos hasta aquí, es realmente un medidor de velocidad? ¿Es adecuado llamarlo velocímetro?

Aceleración Media 1.2.6

La aceleración media entre los instantes de tiempo t_1 y t_2 está dada por la expresión:

$$\boxed{\bar{\vec{a}} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}} \tag{1.29}$$

Gráficamente, el vector $\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$ está representado en la siguiente figura:

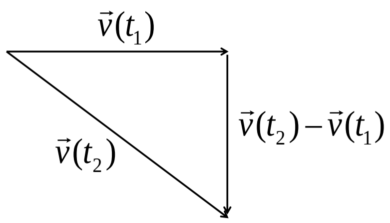


Figura 1.11: El vector $\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$ es aquel que une el extremo de $\vec{v}(t_1)$ con el extremo de $\vec{v}(t_2)$.

Note que dirección de la aceleración media es la misma que la dirección del vector definido por la resta de los vectores $\vec{v}(t_2)$ y $\vec{v}(t_1)$. Matemáticamente esto se expresa como:

$$\frac{\bar{\vec{a}}}{\left\|\bar{\vec{a}}\right\|} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{\|\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)\|} \tag{1.30}$$

Aceleración Instantánea 1.2.7

La aceleración instantánea está dada por la derivada de la velocidad:

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\vec{v}(t)} \tag{1.31}$$

En términos del vector posición $\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + z(t)\hat{z}$, se tiene $\vec{a}(t) = x''(t)\hat{x} + z''(t)\hat{z}$. En la figura 1.12 se muestra la aceleración de la manzana en distintos instantes de tiempo.

Este es un caso particular en donde la aceleración es un vector constante (misma dirección y magnitud para todo instante de tiempo). Esto es consecuencia de la ley de gravitación universal (ver capítulo 2).

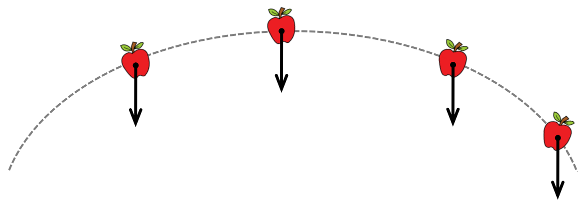


Figura 1.12: En el caso particular de un objeto en caída libre cerca de la superficie terrestre, la aceleración es un vector que apunta siempre hacia el piso, de magnitud $\|\vec{a}\| = g = 9.8\ \mathrm{ms}^{-2}$.

Ejemplo 1.3

Se pueden utilizar los conceptos aprendidos para analizar la trayectoria de un alumno durante su viaje en metro al campus San Joaquín. Para hacer más fácil nuestra tarea, usaremos una versión simplificada de la red del ferrocarril metropolitano, en la cual cada una de las principales estaciones de las rutas que analizaremos están ubicadas en los vértices de un cuadrilátero. En la figura se muestran las coordenadas de estos vértices respecto a un sistema de referencia con su origen en la estación Tobalaba. Las distancias se encuentran expresadas en kilómetros ([km]). Suponga que San Joaquín se encuentra exactamente en el punto medio entre Baquedano y Vicente Valdés.

El alumno se sube al metro en Tobalaba a las 7:30 am y llega a Baquedano a las 7:45 am. Luego, toma el metro hacia San Joaquín a las 7:50 am llegando al Campus a las 8:00 am, con tiempo suficiente para repasar la materia de la clase anterior.

1. Encuentre el desplazamiento total del alumno y la velocidad media con que viajó a la Universidad.

2. Calcule el desplazamiento y velocidad media para el tramo Baquedano-San Joaquín.

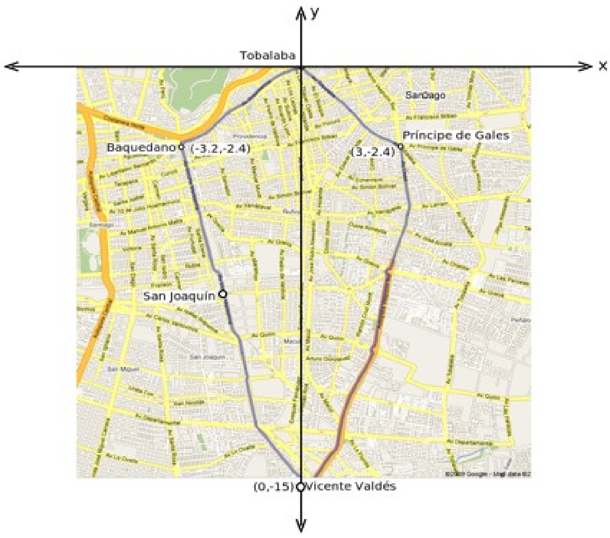
3. ¿Cuál es la rapidez media del metro entre Baquedano y San Joaquín?

4. Si el alumno tomara la decisión de viajar a la Universidad a través de Príncipe de Gales y Vicente Valdés, demoraría una hora y veinte minutos en llegar. Calcule el desplazamiento total, la velocidad media y la rapidez media para este trayecto.

Solución

a) El estudiante se mueve desde el origen del sistema de coordenadas hasta la posición del Campus San Joaquín. Debemos entonces determinar la posición de este último. Como se nos dice en el enunciado, el Campus se encuentra justo en el punto medio entre Baquedano y Vicente Valdés, por lo tanto,

$$\vec{P}_{SJ} = \frac{\vec{P}_{Baq} + \vec{P}_{VV}}{2} = \left(\frac{-3,2+0}{2}, \frac{-2.4-15}{2}\right)\,\mathrm{km} = (-1,6,-8,7)\,\mathrm{km}. \qquad (1.32)$$



El desplazamiento total es entonces $\vec{d} = \vec{P}_{SJ} - \vec{0} = (-1,6,-8,7)$ km. Dado que su viaje completo duró exactamente 30 minutos, tenemos que su velocidad media fue,

$$\vec{V}_m = \frac{(-1,6,-8,7)10^3 \text{ m}}{30 \times 60 \text{ s}} = (-0,889,-4,83) \text{ m/s}. \tag{1.33}$$

b) El desplazamiento total en el tramo Baquedano-San Joaquín está dado por,

$$\vec{d}_{B-SJ} = \vec{P}_{SJ} - \vec{P}_{Baq} = (-1,6,-8,7) \text{ km} - (-3,2,-2,4) \text{ km} = (1,6,-6,3) \text{ km} \tag{1.34}$$

Si consideramos el momento en que el alumno se sube al metro en Baquedano como el comienzo de la segunda parte del viaje, vemos que el tiempo que demora es 10 minutos. Finalmente la velocidad media de este tramo es,

$$\vec{V}'_m = \frac{(1,6,-6,3)10^3 \text{ m}}{10 \times 60 \text{ s}} = (2,667,-10,5) \text{ m/s}. \tag{1.35}$$

c) La rapidez media entre Baquedao y San Joaquín es el largo de la trayectoria divido por el tiempo que demoró en recorrerla. En este caso, dado que el tramo corresponde a una línea recta, el largo de la trayectoria es simplemente $\left\|\vec{d}_{B-SJ}\right\|$:

$$r_m = \frac{\left\|\vec{d}_{B-SJ}\right\|}{10 \times 60 \text{ s}} = \frac{\sqrt{1,6^2 + 6,3^2}\ 10^3 \text{ m}}{600 \text{ s}} = \frac{6500\ m}{600\ s} = 10,83 \text{ m/s}$$

Notar que dado que el desplazamiento que se está considerando se llevó a cabo en una línea recta y en un solo sentido, la rapidez media es también el módulo de la velocidad media,

$$|\vec{V}'_m| = \sqrt{2,667^2 + (-10,5)^2} \text{m/s} = 10,83 \text{ m/s}. \tag{1.36}$$

d) A pesar de haber hecho un recorrido diferente, el estudiante tiene la misma posición final e inicial, lo que significa que su desplazamiento es nuevamente $\vec{d}$, el mismo que obtuvimos en la parte (a). Sin embargo, el tiempo de viaje es ahora de 80 minutos, lo que resulta en una velocidad media:

$$\vec{V}_m'' = \frac{(-1,6,-8,7)10^3 \text{ m}}{80 \times 60 \text{ s}} = (-0,33,-1,81) \text{ m/s} \tag{1.37}$$

que apunta en la misma dirección que la velocidad media obtenida en (a) pero tiene una magnitud considerablemente menor.

Para determinar la rapidez debemos calcular primero la longitud total (S) del trayecto recorrido, que en este caso está compuesto por una serie de tramos rectilíneos,

$$S = |\vec{P}_{PG} - \vec{0}| + |\vec{P}_{VV} - \vec{P}_{PG}| + |\vec{P}_{SJ} - \vec{P}_{VV}|. \tag{1.38}$$

Usted puede verificar que el resultado es $S = 23,294$ km. La rapidez media para este trayecto es entonces,

$$r_m = \frac{S}{\Delta t} = \frac{23,294 \times 10^3 \text{ m}}{80 \times 60 \text{ s}} = 4,853 \text{ m/s}. \tag{1.39}$$

Movimiento Uniformemente Acelerado 1.2.8

Consideremos ahora el caso particular de un objeto que se mueve con aceleración constante $\vec{a}$. Si utilizamos dos ejes $\widehat{x}$ e $\widehat{y}$ para describir el movimiento, entonces la aceleración puede ser descrita como:

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) \tag{1.40}$$

donde a_x, a_y son constantes, y la velocidad del objeto en el instante t se escribe:

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{x} + v_y(t)\hat{y}. \tag{1.41}$$

Al igual que en el caso unidimensional, se obtiene fácilmente que:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

lo que puede ser escrito en términos de sus componentes:

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t \tag{1.42}$$

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y t \tag{1.43}$$

El problema es entonces idéntico al de dos movimientos unidimensionales con aceleración constante. Utilizando los resultados obtenidos para el caso unidimensional podemos encontrar la solución para las coordenadas del vector posición:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \tag{1.44}$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \tag{1.45}$$

Y la posición del objeto está determinada entonces por el vector:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \left(x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2\right)\hat{x} + \left(y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2\right)\hat{y}} \tag{1.46}$$

El movimiento de un cuerpo que cae cerca de la superficie terrestre es un típico ejemplo de movimiento con aceleración constante. Debido a la atracción gravitacional de la Tierra, todos los objetos caen hacia su centro con aceleración constante de magnitud $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$. En el ejemplo del alumno que arroja una manzana al profesor, la aceleración de la manzana una vez que ha sido lanzada puede ser escrita como:

$$\vec{a} = 0\hat{x} - g\hat{y} \tag{1.47}$$

Donde el sistema de referencia utilizado se puede ver en la figura 1.13: Notar que en

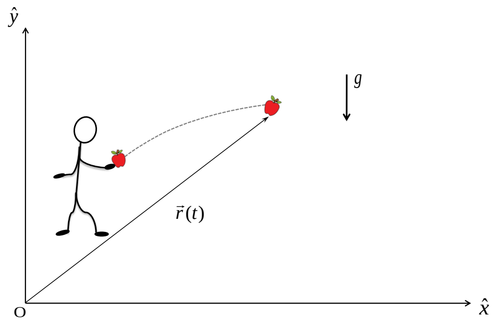


Figura 1.13: La aceleración de todo objeto bajo la influencia de la gravedad de la Tierra es un vector de magnitud g que apunta hacia el suelo.

el eje horizontal la aceleración es nula. Luego, el movimiento es uniforme en dicha dirección y está descrito por:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \tag{1.48}$$

caracterizado por una velocidad horizontal constante. En el eje vertical se tiene un movimiento uniformemente acelerado:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.49}$$

Ahora, notar que el sistema de referencia utilizado es totalmente arbitrario, y por supuesto el movimiento puede ser descrito en cualquier otro sistema. En particular, consideremos por ejemplo un nuevo sistema de ejes, digamos $\hat{x}'$ y $\hat{y}'$, que se obtiene a partir del original mediante una rotación en un ángulo ϑ (Ver Figura 1.14).

Recordemos que la aceleración de gravedad en el sistema original se escribe:

$$\vec{a} = -g\hat{y}$$

De la figura, podemos ver que el vector $\hat{y}$ se escribe en términos del nuevo sistema de referencia:

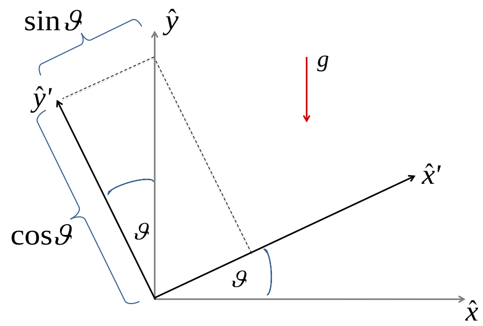


Figura 1.14: Un nuevo sistema de referencia se puede obtener, por ejemplo, mediante una rotación del sistema original.

$$\hat{y} = \sin(\vartheta)\hat{x}' + \cos(\vartheta)\hat{y}'$$

Con lo que la aceleración en el nuevo sistema de referencia queda:

$$\vec{a} = -g\sin(\vartheta)\hat{x}' - g\cos(\vartheta)\hat{y}'$$

Podemos ver entonces que con esta elección de ejes, el movimiento no se descompone en un movimiento con velocidad constante y un movimiento uniformemente acelerado. En efecto, ahora ambos movimientos serán acelerados:

$$x'(t) = x'_0 + v'_{0x}t - \frac{1}{2}g\sin(\vartheta)t^2 \tag{1.50}$$

$$y'(t) = y'_0 + v'_{0y}t - \frac{1}{2}g\cos(\vartheta)t^2 \tag{1.51}$$

Ejemplo 1.4

Suponga que usted patea una piedra hacia un lago con velocidad inicial de magnitud v, formando un ángulo θ con la horizontal. ¿Cuánto tiempo demora la piedra en caer al lago?

Respuesta: Es conveniente fijar un sistema de referencia tal que el origen coincida con la posición inicial de la piedra.

La velocidad inicial está dada por:

$$\vec{v_0} = v\cos(\vartheta)\hat{x} + v\sin(\vartheta)\hat{y} \equiv v_{0x}\hat{x} + v_{0y}\hat{y} \tag{1.52}$$

Así, la posición de la piedra está determinada en cualquier instante de tiempo t por:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}, \tag{1.53}$$

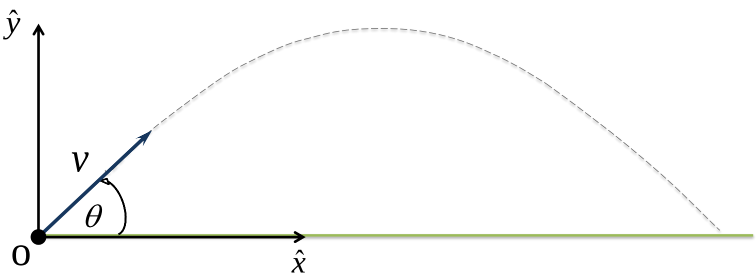
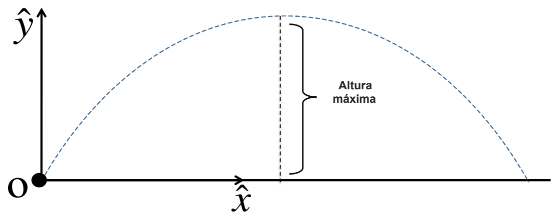


Figura 1.15: El origen del sistema de referencia escogido coincide con el punto de lanzamiento.

con:

$$x(t) = v\cos(\vartheta)t \tag{1.54}$$
$$y(t) = v\sin(\vartheta)t - \tfrac{1}{2}gt^2. \tag{1.55}$$

Para determinar el tiempo que demora la piedra en caer al lago, utilizamos el hecho de que éste será el doble del tiempo que demora en alcanzar su máxima altura:



Sea t* el tiempo de máxima altura. Éste puede ser obtenido considerando la componente vertical de la velocidad:

$$v_y = \frac{dy(t)}{dt} = v_{0y} - gt = v\sin(\vartheta) - gt. \tag{1.56}$$

Para $t = 0$, $v_y(0) = v\sin(\vartheta)$. Luego, la velocidad vertical comienza a disminuir en el tiempo por efecto de la gravedad hasta que llega un instante en que se anula. En ese instante la piedra deja de subir, y por lo tanto se trata justamente del instante en que alcanza la máxima altura. Así:

$$v_y(t_{max}) = v\sin(\vartheta) - gt_{max} = 0 \tag{1.57}$$
$$t_{max} = \frac{v\sin(\vartheta)}{g} \tag{1.58}$$

Finalmente, el tiempo de vuelo es:

$$t_{vuelo} = 2t_{max} = \frac{2v\sin(\vartheta)}{g} \tag{1.59}$$

Además, la máxima altura que alcanza la piedra es:

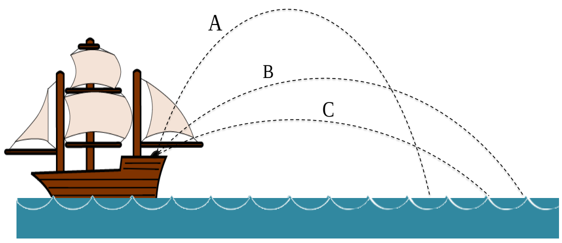
$$h_{max} = y(t_{max}) = \frac{v^2}{2g}\sin^2(\vartheta)$$

El tiempo de vuelo puede ser expresado en términos de esta altura máxima:

$$t_{vuelo} = 2t_{max} = \sqrt{\frac{8h_{max}}{g}} \quad (1.60)$$

¿ENTENDISTEST? 1.4

Con el propósito de calibrar un cañón de corto alcance ubicado en una fragata, se realizan tres disparos registrándose las trayectorias A, B y C mostradas en la figura. ¿En cuál de estos disparos el proyectil tarda menos tiempo en impactar la superficie del mar?



Movimiento Circular 1.2.9

Existen muchas situaciones para las cuales es importante estudiar el movimiento de un cuerpo en una trayectoria circular. Por ejemplo, la trayectoria de la Tierra en torno al Sol es aproximadamente circular, como lo es también la de un auto que gira por una rotonda. Aunque en este caso el movimiento se lleva a cabo en un plano, es decir, en dos dimensiones, nos podemos dar cuenta de que una vez conocido el radio (R) de la trayectoria, necesitamos saber sólo el ángulo θ(t) que forma el vector posición con el eje horizontal para determinar su posición en cualquier instante de tiempo, como se muestra en la Fig. 1.16.

Vemos que el vector posición vendrá dado por:

$$\vec{r} = R(\cos\theta(t)\hat{x} + \sin\theta(t)\hat{y}) = R\hat{r}(t), \quad (1.61)$$

donde hemos definido el vector unitario $\hat{r}(t) = \cos\theta(t)\hat{x} + \sin\theta(t)\hat{y}$, llamado vector radial, que apunta en todo instante de tiempo en la dirección de la posición. El lector puede verificar que efectivamente el módulo de este vector es igual a uno, $||\hat{r}|| = 1$.

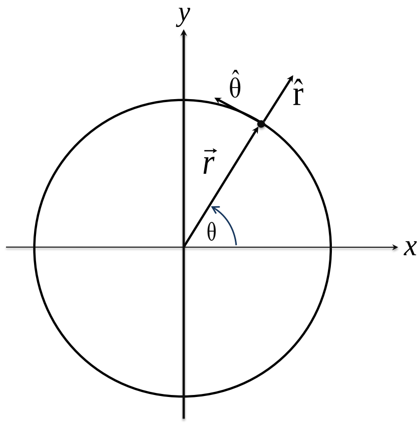


Figura 1.16: Un objeto en movimiento circular describe una circunferencia en el plano. La posición en todo instante puede ser escrita en términos del vector radial $\hat{r}(t)$, como $\vec{r}(t) = R\hat{r}(t)$.

A partir de la posición podemos calcular la velocidad instantánea usando los métodos que aprendimos anteriormente:

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{R}{\Delta t}\left\{[\cos(\theta(t+\Delta t))-\cos(\theta(t))]\,\hat{x}+[\sin(\theta(t+\Delta t))-\sin(\theta(t))]\,\hat{y}\right\}.\end{aligned} \tag{1.62}$$

Ahora, de manera similar a lo que vimos para cinemática en una dimensión en la sección 1.10, la posición angular $\theta(t)$ cambia en el tiempo a una determinada razón $\omega(t)$ que llamamos 'velocidad angular'. Dada nuestra definición del ángulo θ, ω será positivo si el objeto gira en el sentido contrario a los punteros del reloj y viceversa. Cuando el intervalo de tiempo Δt es muy pequeño, podemos entonces suponer que:

$$\theta(t+\Delta t) = \theta(t) + \omega(t)\Delta t. \tag{1.63}$$

Volviendo ahora a la ecuación (1.63), y usando identidades trigonométricas encontramos el término correspondiente a la componente $\hat{x}$:

$$\begin{aligned}\cos(\theta(t)+\omega(t)\Delta t)-\cos(\theta(t)) &= \cos(\theta(t))\cos(\omega(t)\Delta t)-\sin(\theta(t))\sin(\omega(t)\Delta t)-\cos(\theta(t)) \\ &\approx \cos(\theta(t))-\sin(\theta(t))\omega(t)\Delta t-\cos(\theta(t)) \\ &= -\omega(t)\Delta t\sin(\theta(t))\end{aligned}$$

y de manera similar para el término que corresponde a la componente $\hat{y}$ de la velocidad,

$$\begin{aligned}\sin(\theta(t)+\omega(t)\Delta t)-\sin(\theta(t)) &= \sin(\theta(t))\cos(\omega(t)\Delta t)+\cos(\theta(t))\sin(\omega(t)\Delta t)-\sin(\theta(t)) \\ &\approx \sin(\theta(t))+\omega(t)\Delta t\cos(\theta(t))-\sin(\theta(t)) \\ &= \omega(t)\Delta t\cos(\theta(t)).\end{aligned}$$

Podemos ahora reemplazar estos resultados en (1.63) para obtener finalmente,

$$\vec{v} = R\omega(t)(-\sin(\theta(t))\hat{x} + \cos(\theta(t))\hat{y}) = R\omega(t)\hat{\theta(t)}. \tag{1.64}$$

La velocidad tiene entonces una dirección tangente a la trayectoria y una magnitud $|\vec{v}| = R|\omega(t)|$. En la última igualdad definimos el vector unitario $\hat{\theta} = -\sin(\theta(t))\hat{x} + \cos(\theta(t))\hat{y}$, que apunta siempre en la dirección de la tangente a la circunferencia en la posición θ. Es decir, $\hat{\theta}$ es perpendicular al vector $\hat{r}$ en todo instante.

Es importante notar que el resultado (1.64) se puede obtener de manera más directa usando argumentos simples. En la Fig. 1.17 podemos observar que el vector desplazamiento en el pequeño intervalo de tiempo Δt, dado por $\vec{v}\Delta t$, apuntará siempre en la dirección tangencial. Podemos concluir entonces, que el vector velocidad apuntará siempre en esa dirección.

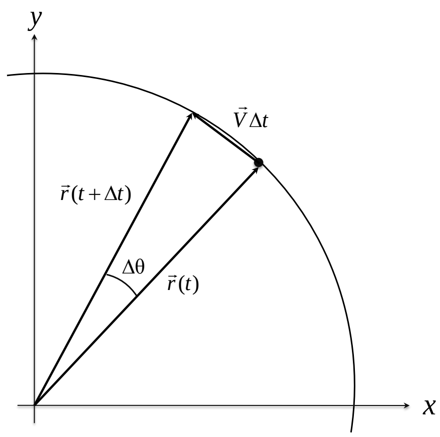


Figura 1.17: El vector velocidad instantánea es siempre tangente a la curva.

Por otra parte, la longitud del arco recorrido en Δt está dado por:

$$\Delta s = R\Delta\theta = R\omega\Delta t, \tag{1.65}$$

y el módulo de la velocidad es entonces $|\vec{v}| = \Delta s/\Delta t = R\omega$.

Consideremos ahora el caso en que la aceleración angular, es decir, la tasa de aumento de la velocidad angular, es constante (α). De manera parecida a como derivamos la expresión para la velocidad a partir de la posición, se puede también encontrar la aceleración a partir de la velocidad en (1.64).

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \tag{1.66}$$

$$= R(\alpha\hat{\theta(t)} - \omega^2\hat{\rho(t)}) \tag{1.67}$$

Concluimos entonces que en el movimiento circular uniformemente acelerado existen dos componentes de la aceleración: una *tangencial* y otra *radial*. La componente tangencial depende de la aceleración angular y la radial apunta hacia el interior del círculo y es la encargada de cambiar continuamente la dirección de la velocidad para obtener un movimiento circular. (Si la velocidad no cambiara su dirección, entonces el objeto se estaría moviendo en línea recta.)

Ejemplo 1.5

Considere que la Tierra gira en torno al Sol en una órbita circular uniforme de radio $R = 149597871$ km. Calcule el módulo de la velocidad y de la aceleración con que gira la tierra. ¿Cómo se compara esta aceleración con $g = 9,8$ m s^2, la aceleración con la cual caen los objetos cerca de la superficie terrestre?.

Solución
En un movimiento circular uniforme, $\alpha = 0$ y entonces el módulo de la velocidad es simplemente:

$$v = wR$$

con R el radio de la órbita, y w la velocidad angular. Sabemos que la Tierra da una vuelta (recorre un ángulo de 2π) en un 365 días, es decir:

$$w = \frac{2\pi}{365 * 24} = 7,17 \times 10^{-4} \text{ rad/hora}$$

Luego:

$$v = wR = 107262 \text{ km/hora} = 29,8 \text{ km/s}$$

El módulo de la aceleración es:

$$a = v^2/R = 0,00593 \text{ m/s}^2$$

Es decir, unas 1661 veces más pequeña que g.

Problemas resueltos 1.3

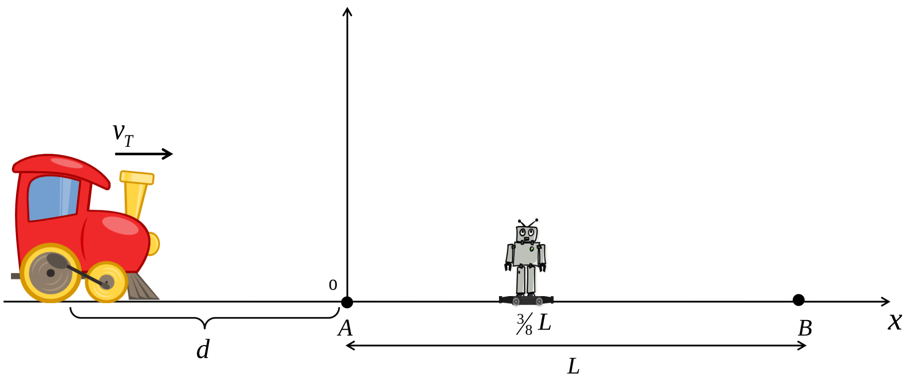
Problema 1.1

Un robot se encuentra caminando sobre un puente de la vía férrea que une los puntos A y B. Repentinamente, cuando se encuentra a $3/8$ del tramo AB de A, escucha el silbido del tren que se acerca a velocidad constante v_T, tal como se muestra en la figura. Lamentablemente, el robot se puede desplazar por los rieles con una rapidez máxima v_r, lo que ocasiona bajo estas circunstancias, que si el robot corre hacia A, el tren lo alcanza en A, y si corre hacia B, el tren lo alcanza en B. Determine la rapidez máxima v_r del robot en función de la rapidez del tren.

Solución
La posición del tren en función del tiempo está dada por:

$$x_T(t) = -d + v_T t,$$

donde d es la distancia (a priori desconocida) entre el tren y el punto A en el instante inicial.



Supongamos que el robot decide correr hacia la izquierda, de esta forma tenemos que

$$x_R(t) = \frac{3L}{8} - v_r t,$$

pero sabemos que en este caso, el robot es alcanzado por el tren en A ($x = 0$), esto significa que

$$0 = -d + v_T t_1 = \frac{3L}{8} - v_r t_1,$$

donde t_1 corresponde al tiempo en el cual ambos se encuentran. De esto se desprende que

$$t_1 = \frac{d}{v_T},$$

así entonces encontramos la primera relación:

$$v_r = \frac{3Lv_T}{8d}.$$

Ahora bien, si el robot decide correr hacia la derecha se tiene que

$$x_R(t) = \frac{3L}{8} + v_r t,$$

pero en este caso, el robot y el tren se encuentran en B en un tiempo t_2, tal que

$$L = -d + v_T t_2 = \frac{3L}{8} + v_r t_2.$$

Así obtenemos

$$\frac{L+d}{v_T} = t_2,$$

y entonces

$$L = \frac{3L}{8} + v_r \frac{L+d}{v_T}.$$

De la primera relación encontrada tenemos

$$\frac{8dv_r}{3v_T} = L,$$

luego remplazando este valor en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{8dv_r}{3v_T} = \frac{3}{8}\frac{8dv_r}{3v_T} + v_r \frac{\frac{8dv_r}{3v_T} + d}{v_T}$$

$$5v_T = 8v_r + 3v_T.$$

Finalmente, podemos expresar la rapidez a la que se mueve el robot en términos de la rapidez del tren

$$2v_T = 8v_r \rightarrow v_r = \frac{v_T}{4}.$$

Problema 1.2

Un auto que viaja en línea recta parte desde el reposo acelerando a razón constante de 10 m/s^2 durante 10 segundos y luego desacelera a razón de 2 m/s^2. Calcule el intervalo de tiempo que demora el auto en detenerse desde que comienza a desacelerar.

Solución

La posición en función del tiempo en un movimiento con aceleración constante está dada por la función:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + a\frac{t^2}{2}$$

Luego la velocidad en función del tiempo está dada por

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_0 + at = at.$$

Durante los primeros 10 s, la aceleración está dada por $a_1 = 10$ m/s^2. Por lo tanto al cabo de 10 s la velocidad tendrá un valor de

$$v(10 \text{ s}) = (10 \text{ s})(10 \text{ m/s}^2) = 100\text{m/s}.$$

Ahora podemos fijar un nuevo origen para el tiempo, en el instante en que comienza a desacelerar, en este caso $a_2 = -2$ m/s^2. De esta forma se obtiene que la velocidad en función del tiempo está dada por

$$v(t) = v_0 + a_2 t = 100 \text{ m/s} - (2 \text{ m/s}^2)t.$$

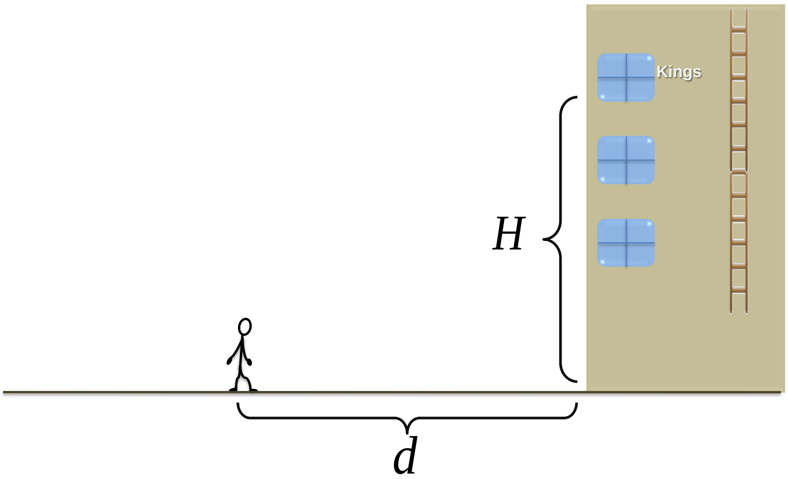
Sea t' el instante en el cual el auto se detiene. Esto quiere decir que $v(t') = 0$ m/s

$$v(t') = 100 \text{ m/s} - (2 \text{ m/s}^2)t' = 0 \ \rightarrow t' = 50 \text{ s}$$

Por lo tanto el auto demora 50 s en frenar.

Problema 1.3

Suponga que un alumno desea arrojar una manzana al profesor Kings, quien constantemente se ve obligado a reemplazar la ventana de su oficina, la que se encuentra en un edificio a una altura H. Si el alumno está a una distancia d del edificio. ¿Con qué velocidad (magnitud y dirección) debe lanzar la manzana de forma que ésta ingrese de forma horizontal por la ventana del profesor Kings? Desprecie la altura del alumno en comparación con la del edificio.



Solución

Fijaremos el origen en el punto de lanzamiento y designaremos como v la magnitud de la velocidad de lanzamiento y ϑ el ángulo que forma ésta con la horizontal. Definido esto, la posición de la manzana está descrita por el siguiente vector

$$\vec{r}(t) = v\cos(\vartheta)t\ \hat{x} + \left(v\sin(\vartheta)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{y}, \tag{1.68}$$

y la velocidad se escribe así

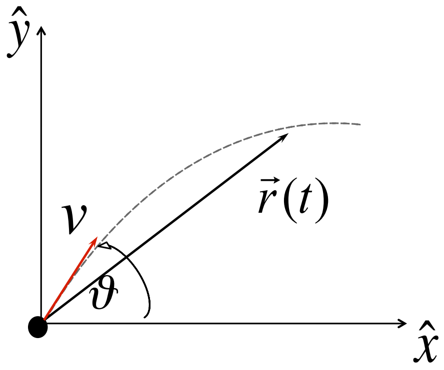
$$\vec{v}(t) = v\cos(\vartheta)\hat{x} + (v\sin(\vartheta) - gt)\,\hat{y}. \tag{1.69}$$

Definiendo como t^* el instante en el cual la manzana impacta la ventana, tenemos que

$$y(t^*) = v\sin(\vartheta)t^* - \frac{1}{2}gt^{*2} = H$$
$$x(t^*) = v\cos(\vartheta)t^* = d$$

Además, la velocidad vertical en dicho instante debe ser nula para que la manzana incida sobre la ventana de forma horizontal, esto quiere decir que la manzana alcanza su altura máxima justo al impactar la ventana, por lo tanto

$$v\sin(\vartheta) - gt^* = 0 \tag{1.70}$$



De aquí encontramos el tiempo de impacto,

$$t^{*} = v\frac{\sin(\vartheta)}{g} \tag{1.71}$$

Remplazando $t*$ en la ecuación para $y(t^{*})$ y $x(t^{*})$, se obtiene:

$$\frac{v^2}{2g}\sin^2(\vartheta) = H \tag{1.72}$$

$$\frac{v^2}{g}\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) = d \tag{1.73}$$

Dividiendo ambas ecuaciones encontramos una condición para el ángulo de lanzamiento

$$\frac{H}{d} = \frac{\tan(\vartheta)}{2}$$

con lo que se obtiene que

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{2H}{d}\right)$$

Para determinar la velocidad de disparo elevamos al cuadrado la expresión 1.73, obteniendo

$$d^2g^2 = v^4\cos^2(\vartheta)\sin^2(\vartheta),$$

y utilizando la ecuación 1.72 se obtiene

$$d^2g^2 = v^4\left(1-\sin^2(\vartheta)\right)\sin^2(\vartheta) = v^4\left(1-\frac{2Hg}{v^2}\right)\frac{2Hg}{v^2}$$

$$d^2g^2 = \left(v^2-2Hg\right)2Hg$$

Finalmente, la magnitud de la velocidad de lanzamiento debe ser

$$v = \sqrt{\frac{d^2g}{2H}+2Hg}$$

Note que esta expresión tiene las dimensiones adecuadas de velocidad.

Aplicación numérica: supongamos que la oficina del profesor se encuentra a una altura $H = 7$ m y que el lanzamiento se desea efectuar a una distancia de $d = 10$ m. La velocidad de lanzamiento debe ser entonces de $v \approx 14,4$ m/s, formando un ángulo $\vartheta \approx 54,5^o$ respecto a la horizontal.

Problema 1.4

Un guardaparques quiere lanzar un dardo tranquilizante con rapidez inicial v_0 a un mono feroz que está en la copa de un árbol, a distancia horizontal d y altura $h = d$. Suponiendo que el mono se deja caer en el mismo instante del disparo, y recordando que la gravedad también actúa sobre el dardo, ¿En qué ángulo con respecto a la horizontal debe ser lanzado el dardo?¿Todos los valores de v_0 garantizan un impacto?

Solución

La figura 1.18 ilustra la situación en el instante inicial. Así, la ecuación de movimiento para el dardo es

$$x_B(t) = V_{ox}t$$

$$y_B(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2,$$

y para el mono

$$x_m(t) = d$$

$$y_m(t) = d - \frac{1}{2}gt^2.$$

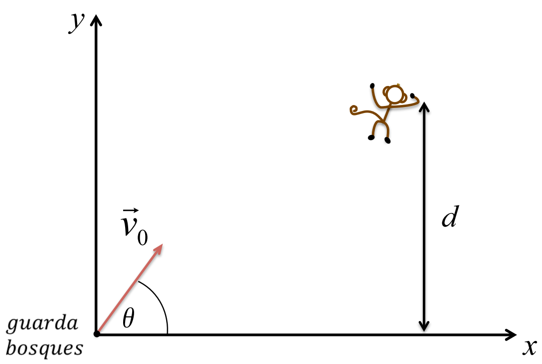


Figura 1.18: Diagrama del instante en el cual el guardaparques dispara el dardo tranquilizante.

El dardo impactará al mono solo si se cumple que

$$x_B(t') = x_m(t') \quad \text{e} \quad y_B(t') = y_m(t'),$$

para algún t'. Por lo tanto, se tiene que

$$v_{0x}t' = d \rightarrow t' = \frac{d}{v_{0x}}$$

$$v_{0y}t' - \frac{1}{2}g(t')^2 = d - \frac{1}{2}g(t')^2$$

Al evaluar $t' = \frac{d}{v_{0x}}$ en la segunda ecuación, se obtiene

$$\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{v_0 \sin\vartheta}{v_0 \cos\vartheta} = 1.$$

Por lo tanto el ángulo de lanzamiento debe ser tal que

$$\tan\vartheta = 1 \quad \rightarrow \quad \vartheta = \frac{\pi}{4}.$$

Note que si el cazador está suficientemente lejos del mono, éste podría llegar al piso antes de que el dardo lo alcance. Por lo tanto, para que esto no ocurra, se debe cumplir que cuando $x_B = d$, $y_B > 0$, es decir

$$y_m(t') = d - \frac{1}{2}gt'^2 = d - \frac{1}{2}g\frac{d^2}{v_0^2\cos^2\vartheta} > 0$$

Recordando que $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, obtenemos que

$$v_0^2 > gd.$$

Problema 1.5

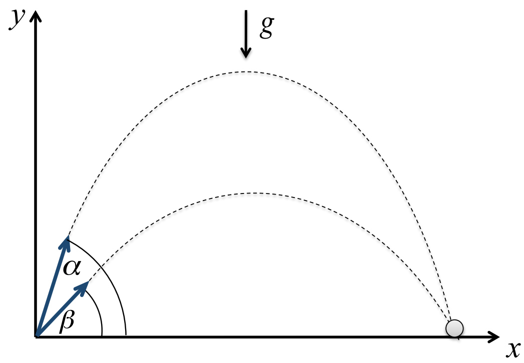
Dos proyectiles son lanzados simultáneamente desde el mismo punto con igual rapidez y con ángulos respecto a la horizontal α y β, donde ($\alpha > \beta$). Si ambos llegan a un mismo punto, ubicado a igual altura que el punto del lanzamiento, pero llegan en instantes diferentes.

(a) Exprese el ángulo β en función de α.

(b) Encuentre la razón entre los tiempos de llegada. Exprese su resultado en términos de α.

Solución
Consideremos un ángulo general ϑ de lanzamiento. Fijando el origen en el lugar del lanzamiento, tenemos que

$$y(t) = v_0 \sin\vartheta t - \frac{1}{2}gt^2$$



$$x(t) = v_0 \cos\vartheta$$

El tiempo que un proyectíl demora en alcanzar la altura máxima es tal que

$$y(t_{max}) = 0$$

$$\to t_{max} = \frac{v_0 \sin\vartheta}{g}.$$

Luego, el tiempo de vuelo total es

$$t_{vuelo} = 2\frac{v_0 \sin\vartheta}{g}.$$

Con esto, la distancia en el eje x a la cual cae el proyectil está dada por

$$R = x(t_{vuelo}) = v_0 \cos\vartheta \frac{2v_0 \sin\vartheta}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\vartheta)}{g}$$

Como ambos proyectiles caen en la misma posición, se tiene que

$$\frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\beta)}{g},$$

por lo tanto

$$\sin(2\alpha) = \sin(2\beta).$$

De este resultado se deduce que

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

b) Como t_{vuelo} es $2v_0 \sin\vartheta/g$, la razón entre ambos tiempos de llegada es

$$\frac{t_\alpha}{t_\beta} = \frac{\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}}{\frac{2v_0 \sin\beta}{g}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

finalmente

$$\frac{t_\alpha}{t_\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha.$$

Problema 1.6

Una partícula se mueve en el plano x-y con una velocidad que depende de su posición mediante la función $\vec{v} = a\hat{x} + bx\hat{y}$, donde a y b son constantes. Si en el instante inicial la partícula se encuentra en el origen, encuentre la ecuación de la trayectoria $y(x)$.

Solución

Sea

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y},$$

el vector posición de la partícula. Luego, la velocidad está dada por

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\hat{x} + \dot{y}(t)\hat{y}$$

Del enunciado sabemos que

$$\vec{v}(t) = a\hat{x} + bx\hat{y}$$

Por lo tanto, se debe cumplir que

$$\dot{x}(t) = a$$
$$\dot{y}(t) = bx(t).$$

La primera ecuación indica que a lo largo del eje x el movimiento es uniforme, es decir

$$x(t) = x(0) + at = at,$$

ya que en $t = 0$ la partícula se encuentra en el origen ($x_0 = 0$). Sustituyendo este resultado en la ecuación para $\dot{y}(t)$, se obtiene que

$$\dot{y}(t) = bat.$$

De este último resultado se puede observar que el movimiento en el eje y es uniformemente acelerado, por lo tanto

$$y(t) = y(0) + \dot{y}(0) + \frac{1}{2}bat^2 = \frac{1}{2}bat^2.$$

Donde hemos considerado las condiciones iniciales $y_0 = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$. En resumen, las coordenadas x e y de la partícula como función del tiempo están dadas por

$$x(t) = at$$
$$y(t) = \frac{ab}{2}t^2.$$

Podemos escribir $t = x/a$ y remplazarlo en la ecuación para $y(t)$, con lo que se deduce que la ecuación de trayectoria es

$$y(x) = \frac{bx^2}{2a}$$

Es decir, la trayectoria de la partícula es una parábola en el plano x-y.

2 Dinámica

El capítulo anterior fue dedicado a introducir una serie de conceptos con el propósito de estudiar la descripción matemática de la trayectoria de un cuerpo. Note que en ningún momento nos referimos a las causas de este movimiento, si no que sólo lo describimos mediante elementos matemáticos, como vectores, funciones y sus derivadas. En este capítulo, estudiaremos el movimiento de los cuerpos como resultado de las *fuerzas* que actúan sobre él. Como veremos a continuación, tanto la definición rigurosa del concepto de fuerza, como su relación con el movimiento, fueron establecidas hace más de tres siglos.

Leyes de Newton 2.1

Las tres leyes de movimiento fueron compiladas y publicadas por primera vez en 1687 por el físico inglés Sir Isaac Newton en su célebre trabajo *“Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”* (latín para “Principios Matemáticos de la Filosofía Natural”) y constituyen las ideas fundamentales de la Mecánica Clásica. Si bien pueden ser enunciadas en pocas palabras, sus consecuencias y rango de aplicación son enormes y son fundamentales tanto para entender fenómenos de nuestra vida diaria, como para resolver complejos problemas de ingeniería. De hecho, podríamos decir que los capítulos siguientes no son más que una exploración sistemática de diversas consecuencias de las tres Leyes de Newton que se enuncian y explican a continuación.

Primera Ley: *En un sistema de referencia inercial, cada cuerpo material persiste en su estado de reposo o movimiento uniforme en línea recta, a menos que una fuerza actúe sobre él y lo obligue a cambiar su estado de movimiento.*

Esta se conoce como la *ley de inercia*, y en realidad no es otra cosa que la definición de un **marco de referencia inercial** como uno en cual una partícula que *no* es sometida a una fuerza *no* acelera. Por ejemplo, para establecer si el "laboratorio" en el que estamos realizando nuestros experimentos está en un marco de referencia inercial podemos hacer lo siguiente: Tomar un cuerpo y asegurarnos que sobre él no exista ninguna acción externa. Luego, si al medir su velocidad determinamos que ésta es constante, entonces el marco de referencia de nuestro laboratorio es inercial, de lo contrario no lo es y debemos tener cuidado en la interpretación de los resultados de nuestros experimentos porque en este marco de referencia no inercial las leyes de movimiento no necesariamente se cumplirán.

Segunda Ley: *En un sistema inercial, el cambio de la cantidad $m\vec{v}$ de una partícula es igual a la fuerza neta que actúa sobre ella*

La segunda ley de Newton se puede escribir en términos matemáticos de la siguiente manera:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}} \tag{2.1}$$

Se puede demostrar que la segunda ley de Newton permite determinar (en principio) la trayectoria completa de un cuerpo si se conoce su masa, la fuerza que actúa sobre éste en todo tiempo t y su posición y velocidad en algún momento t_0.

Tercera Ley: *Si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre otro cuerpo B, entonces éste último ejercerá sobre A una fuerza de igual magnitud y en la dirección opuesta.*

Esta ley, conocida también como el *principio de acción y reacción*, señala que una fuerza nunca aparecerá sola, sino que siempre vendrá acompañada de otra fuerza igual y contraria. Sus consecuencias serán estudiadas en los capítulos siguientes, en particular cuando estudiemos colisiones entre dos o más objetos.

Fuerzas 2.2

Se puede definir fuerza como una acción sobre un cuerpo que es capaz de modificar su estado de movimiento, cuando éste es observado desde un sistema inercial. Por supuesto, esta definición está íntimamente relacionada con la segunda ley de Newton, la cual nos dice que al aplicar una fuerza a un cuerpo de masa m éste experimenta un cambio en su velocidad dado por la ecuación 2.1. Las fuerzas son entonces cantidades vectoriales, cuya magnitud se mide en el sistema internacional usando la unidad llamada "Newton", definida como N = kg m/s^2.

A continuación, definiremos en detalle algunos tipos de fuerzas que resultan de gran utilidad para analizar diversos problemas de mecánica. Estas fuerzas son: de gravedad, elástica, tensión, fuerzas de contacto y de roce. Cabe señalar que de estas sólo la de gravedad es considerada como una de las fuerzas fundamentales de la Naturaleza. Las otras cuatro son manifestaciones indirectas de la fuerza electromagnética, también considerada como fundamental[1].

Fuerza de Gravedad: *Ley de gravitación universal de Newton* 2.2.1

Esta importante ley, que también fue publicada por primera vez en el "Principia" de Newton, establece que entre dos cuerpos puntuales con masa existe una fuerza atractiva a lo largo de la línea que los une, cuyo módulo es proporcional al producto de las masas de los cuerpos, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia D entre ellos:

$$\left\|\vec{F}\right\| = \frac{Gm_1 m_2}{D^2},$$

donde m_1 y m_2 son las masas de los cuerpos y la constante $G \approx 6,673\text{x}10^{-11}\text{N m}^2/\text{kg}^2$ es llamada la constante de gravitación universal[2]. Esta ley permite predecir tanto la forma de las órbitas de planetas y satélites, como explicar la aceleración vertical que observamos todos los días cerca de la superficie de la Tierra.

En este libro nos concentraremos principalmente en los fenómenos que ocurren cerca de la superficie terrestre. Debido a que el radio de nuestro planeta es de unos 6.371 kilómetros, en la mayoría de los casos consideraremos que la distancia entre algún cuerpo cerca de su superficie y el centro de la Tierra es constante e igual al radio de esta última (R_T). Por lo tanto, en estos casos es una buena aproximación considerar que un cuerpo de masa m es atraído hacia el centro de la Tierra por una fuerza de magnitud.

$$\left\|\vec{F}\right\| = m\frac{GM_T}{R_T^2} = mg,$$

donde M_T es la masa de la Tierra, y $g = 9,81\text{m}/\text{s}^2$ es la aceleración de un cuerpo que cae libremente[3].

[1]Las otras dos fuerzas conocidas consideradas como fundamentales son la nuclear fuerte y la nuclear débil.

[2]Newton demostró matemáticamente que esta ley también es válida para cuerpos esféricos, donde D es la distancia entre sus centros.

[3]Debido a que la Tierra no es perfectamente esférica existen variaciones del orden del 1 % respecto a este valor de g.

Fuerza elástica y Ley de Hooke 2.2.2

En general, todo cuerpo que está sometido a la acción de una fuerza experimenta una deformación. Esta puede ser despreciable o no, dependiendo del material del que está hecho el cuerpo y de la magnitud de la fuerza aplicada. Un resorte es un ejemplo de un objeto que se deforma (se estira o se contrae) cuando se aplica una fuerza sobre él.

Consideremos una barra que posee un largo natural L (ante la ausencia de fuerza aplicada) y de sección transversal A. Imaginemos ahora que la barra está sometida a la acción de un par de fuerzas aplicadas en sus extremos de igual magnitud pero en sentido opuesto (esto es necesario para que la barra esté en equilibrio), tal como se muestra en la figura 2.1. Bajo la acción permanente de estas fuerzas, el largo de la barra cambiará en una cantidad ΔL. Queremos encontrar una relación entre ΔL y la fuerza F aplicada.

Si fijamos nuestra atención en un trozo de la barra de longitud x, de manera tal que en un extremo de este trozo está actuando la fuerza F, que el agente externo ejerce, y en el otro extremo está actuando la fuerza interna F_{int} que el trozo de barra restante ejerce sobre éste.

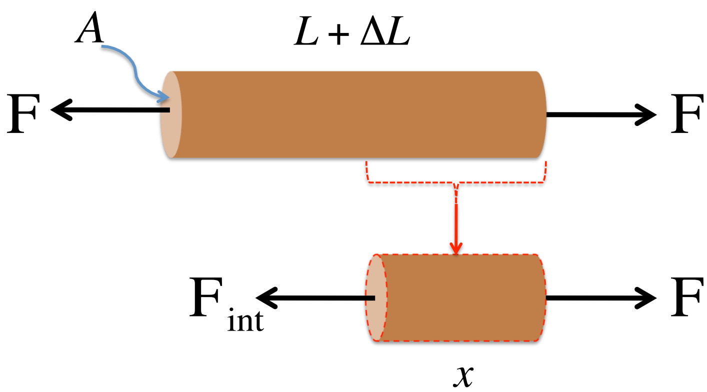


Figura 2.1: Barra sometida a esfuerzo axial.

Claramente $F_{int} = F$, dado que la barra está en reposo. El origen de esta fuerza interna es electromagnético, de hecho es producto de la interacción entre los átomos que la componen. Los átomos que están en la cara del trozo de barra de la derecha, ejercen una fuerza sobre los que están en la cara del trozo de la izquierda, y viceversa.

Ley de Hooke

Cuando las deformaciones son relativamente pequeñas, los enlaces entre átomos no sufren mayor variación y por tanto el estiramiento de la barra es proporcional a la fuerza aplicada. Este régimen es descrito mediante la *Ley de Hooke*, la cual indica que la relación entre la fuerza aplicada F y el estiramiento ΔL es lineal, esto es:

$$F = k\Delta L$$

La constante de proporcionalidad k depende del material del que está hecha la barra y de sus dimensiones. Es común escribir esta relación en términos del esfuerzo σ y la deformación ϵ que se definen como $\sigma = \frac{F}{A}$ (fuerza por unidad de área) y $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$ (cambio relativo en el largo). En términos de estas cantidades la Ley de Hooke queda escrita así:

$$\sigma = Y\epsilon$$

donde la constante de proporcionalidad $Y = kL/A$ es conocida con el nombre de *Módulo de Young*, el cual es una propiedad del material que conforma el objeto y por ende no depende de su geometría.

Es claro que existirá un valor de la fuerza aplicada para el cual la barra se romperá o quedará deformada de forma permanente. De hecho, la ley de Hooke es válida sólo hasta un cierto valor de esfuerzo y deformación. La figura 2.2 muestra el comportamiento típico de una barra de acero que es sometida a un ensayo de tracción, como el de la figura 2.1.

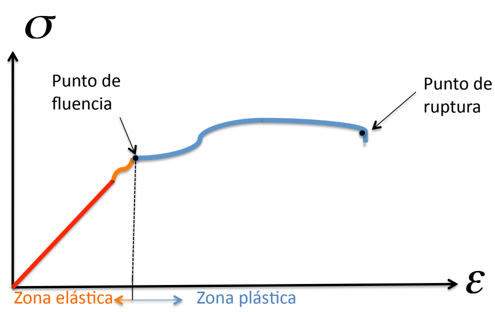


Figura 2.2: Representación de una curva de esfuerzo versus deformación característica, obtenida en un ensayo de tracción de una barra de acero.

La región en la cual es válida la ley de Hooke es justamente la curva roja (zona lineal), esta región es también llamada zona elástica. La zona elástica es aquella en que una vez que se deja de aplicar un esfuerzo, la barra regresa a su estado original. La zona plástica es aquella en que el esfuerzo al que la barra es sometida es tal que ésta queda con una deformación permanente. El punto de fluencia es el punto en el cual ocurre la transición desde la zona elástica a la zona plástica, y el punto de ruptura es el punto en el cual la barra se rompe.

El resorte es un ejemplo de aparato que obedece la ley de Hooke. Éste se fabrica con características adecuadas para una aplicación particular. Por ejemplo, se utilizan grandes resortes rígidos (k muy grande) en la suspensión de un automóvil, o pequeños y flexibles (k relativamente pequeño) en un lápiz de punta retráctil. Por supuesto que en el caso de los resortes, la constante elástica k no depende sólo del material del cual éste está hecho, sino que también depende de su geometría, esto es, del número de vueltas, del diámetro del alambre, del radio de curvatura, etc.

Para ejemplificar cómo se aplica la ley de Hooke en el caso de un sistema con resortes, consideremos un problema en el cual se desea determinar el estiramiento total cuando se aplica una fuerza de módulo F a dos resortes iguales conectados en serie como se muestra en la figura siguiente. Considere que la constante elástica de los resortes es k y el largo sin deformar es L.

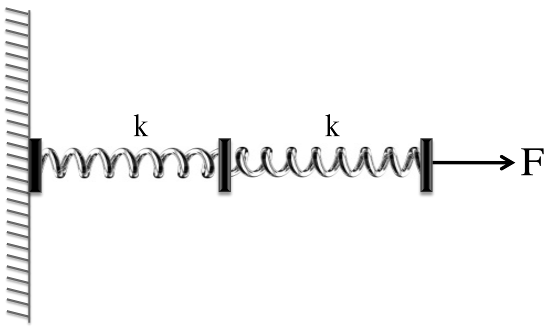


Figura 2.3: Dos resortes conectados en serie.

Para analizar este tipo de problemas en los que interactúan diferentes cuerpos y fuerzas, es muy útil realizar un diagrama comúnmente llamado **"diagrama de cuerpo libre" (DCL)**. Este diagrama consiste en representar por separado todos los cuerpos involucrados en el problema, y en cada uno de ellos indicar las fuerzas a las que están sometidos. Realizar este tipo de diagramas facilita enormemente el análisis y resolución de un problema.

Para resolver este problema tenemos que realizar dos diagramas de cuerpo libre, uno para cada resorte. Sobre el resorte de la derecha actúa la fuerza externa F en uno de sus extremos y en el otro actúa la fuerza F_{ID}, que es la fuerza que el resorte de la izquierda ejerce sobre el de la derecha. Sobre el resorte de la izquierda actúa la fuerza que ejerce la pared F_P, y la fuerza F_{DI}, que es la fuerza que el resorte de la derecha ejerce sobre el resorte de la izquierda.

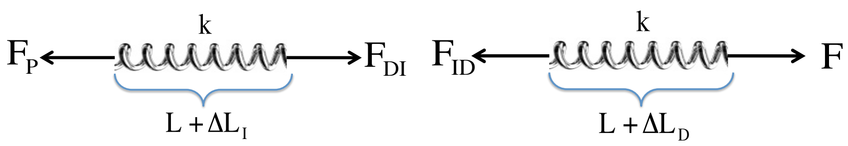


Figura 2.4: Diagramas de cuerpo libre para dos resortes conectados en serie.

La tercera ley de Newton, el principio de acción y reacción, establece que F_{ID} debe ser igual a F_{DI}. Luego, aplicando la segunda ley de newton al resorte de la derecha y considerando que éste está en reposo ($a = 0$), se obtiene que $F_{ID} = F$. Realizando el mismo análisis en el resorte de la izquierda, se obtiene que $F_P = F_{DI} = F$. De este resultado se desprende que ambos resortes experimentan la misma deformación, la que podemos calcular mediante la ley Hooke. Por lo tanto el estiramiento del sistema es

$$\Delta L_{total} = 2\Delta L = 2\frac{F}{k}.$$

Note que éste sistema de dos resortes de constante k en serie es equivalente a un resorte de constante $k/2$.

Tensión

La tensión en una cuerda es similar a la fuerza interna en el caso de la barra elástica o de un resorte que se discutió anteriormente (figura 2.1). El valor de la tensión corresponde al módulo de la fuerza interna originada por la interacción electromagnética entre los átomos que la componen. Consideremos el caso simple de un bloque que está colgando desde el techo de un galpón mediante una cuerda. Para este caso, el diagrama de cuerpo libre para el bloque queda como se muestra en la figura 2.5. Claramente la aceleración del bloque es nula, por ello al aplicar la segunda ley de Newton se obtiene que la tensión de la cuerda debe contrarrestar al peso del bloque. Esto es, $T = mg$. Claramente éste es el valor de la tensión en la cuerda justo en la zona cerca del contacto con el bloque, ya que si la cuerda tiene masa, la tensión a lo largo de ésta varía.

Para estudiar cómo varía la tensión de la cuerda cuando ésta tiene una masa M y una longitud L, utilizaremos la figura 2.6. En esta figura hemos incluido el diagrama de cuerpo libre de un trozo de cuerda de largo $(L-x)$, en el que uno de sus extremos está en contacto con el bloque y el otro extremo está a una distancia x del techo del galpón. Sobre este trozo de cuerda el bloque ejerce una fuerza de módulo mg, y el trozo de cuerda restante ejerce una fuerza $T(x)$, que es justamente el valor de la tensión de la cuerda en ese punto. El peso del trozo de cuerda es llamado W_{L-x}.

Para que este trozo de cuerda esté en equilibrio, esto es, que tenga aceleración nula, se debe cumplir que

$$T(x) = mg + W_{L-x},$$

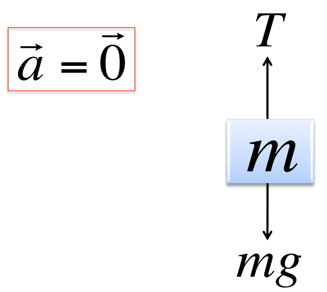


Figura 2.5: Diagrama de cuerpo libre para un bloque de masa m colgando desde el techo de un galpón mediante una cuerda.

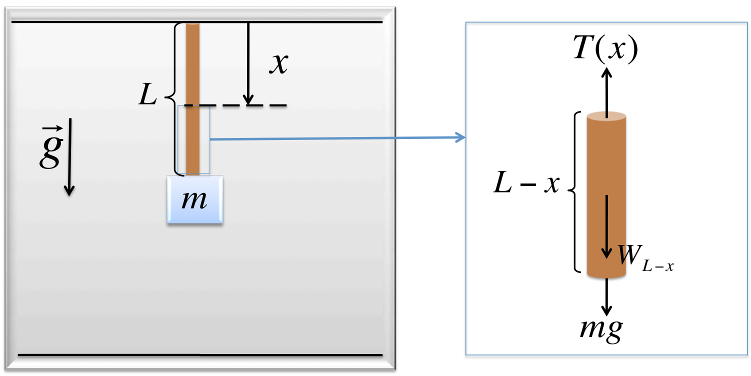


Figura 2.6: Bloque de masa m colgando desde el techo de un galpón mediante una cuerda de masa M y largo L, y diagrama de cuerpo libre de un trozo de la cuerda.

donde $W_{L-x} = \frac{Mg(L-x)}{L}$, valor que se obtiene por la aplicación de una simple regla de tres (se supone que la masa M de la cuerda está uniformemente distribuida a lo largo de ésta). Luego, la tensión en la cuerda en función de la variable x, es

$$T(x) = mg + \frac{Mg(L-x)}{L}.$$

Note que cuando $x = L$ la tensión es mg, que es el mismo resultado obtenido anteriormente. Cuando $x = 0$, la tensión en la cuerda es $(M + m)g$, que es justamente el valor de la fuerza necesaria para sostener al bloque y cuerdas juntos. En el caso de una cuerda ideal consideramos que su masa es despreciable respecto a la masa del bloque ($M << m$), por lo tanto la tensión es igual al valor mg en toda la cuerda. Esto se observa claramente al hacer tender a cero el valor M en la ecuación anterior.

Fuerzas de contacto entre dos cuerpos 2.2.3

Cuando dos cuerpos están en contacto éstos pueden estar ejerciendo una fuerza el uno contra el otro (los átomos de un cuerpo interactúan con los átomos del otro). La tercera ley de Newton nos dice que si un cuerpo ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre otro cuerpo, este último ejercerá una fuerza -$\vec{F}$ sobre el primero. Consideremos el caso de un bloque de masa M que reposa sobre un plano inclinado tal como se muestra en la figura 2.7.

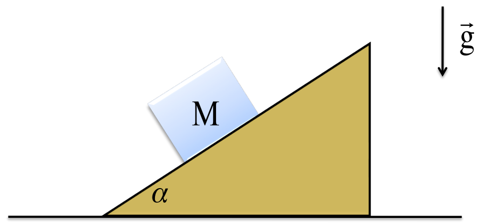


Figura 2.7: Un bloque de masa M en reposo sobre un plano inclinado.

Dado que el bloque está en reposo, la fuerza que el plano ejerce sobre el bloque ($\vec{F_{PM}}$) debe ser de igual módulo, pero de sentido opuesto, que la fuerza peso del bloque ($m\vec{g}$). Es decir, $\vec{F}_{PM} = -M\vec{g}$. Esto se representa en la figura 2.8. Por supuesto, la fuerza que ejerce el bloque sobre el plano ($\vec{F_{MP}}$) debe ser igual a $-\vec{F_{PM}}$, por lo tanto $\vec{F_{MP}} = M\vec{g}$. Esto último nos parece evidente, ya que finalmente es el plano el que soporta el peso del bloque.

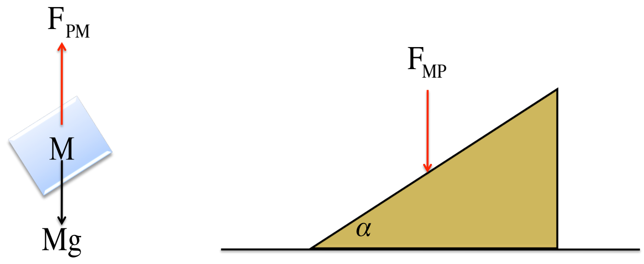


Figura 2.8: Diagrama de cuerpo libre del bloque (a la izquierda) y del plano inclinado (a la derecha).

Ahora fijemos nuestra atención en la fuerza $\vec{F_{PM}}$. Usualmente esta fuerza se descompone en dos fuerzas, que comúnmente llamamos **Fuerza Normal** y **Fuerza de Roce**. La fuerza normal es la componente perpendicular a las superficies de contacto y evita que los átomos de un cuerpo ingresen en el otro, formando un sólo objeto. Es de carácter repulsivo (es ésta fuerza la que nos permite, por ejemplo, pararnos sobre una superficie, pues de no existir la fuerza normal, nuestros átomos podrían atravesar el piso o una pared). La fuerza de roce es la componente paralela a estas superficies, y tiende a oponerse al deslizamiento relativo entre ambos objetos. Por supuesto, ambas componentes son producto de la interacción electromagnética entre los átomos de ambos cuerpos que están en la zona de contacto.

Fuerza de roce

La fuerza de roce tiene la particularidad de que siempre se opone al desplazamiento relativo entre las superficies. Esta fuerza es la responsable de evitar que el bloque deslice por el plano inclinado en la figura 2.7.

Con el propósito de estudiar el comportamiento de la fuerza de roce entre dos superficies, consideremos el montaje experimental mostrado en la figura 2.9. Este consiste de un bloque de masa M que descansa sobre una tabla, la cual a su vez está ubicada sobre una mesa de aire de tal modo que la fuerza de roce entre la mesa y la tabla es despreciable (pues no hay contacto entre ambas superficies). Dado que estamos interesados en medir la fuerza de roce entre el bloque y la tabla, esta última se conecta a un dinamómetro[4], el cual a su vez está fijo a la mesa. El dinamómetro entonces mide la fuerza de roce entre ambos cuerpos. Finalmente el bloque se conecta a un peso que cuelga mediante una cuerda ideal, la cual a su vez pasa por una polea ideal.

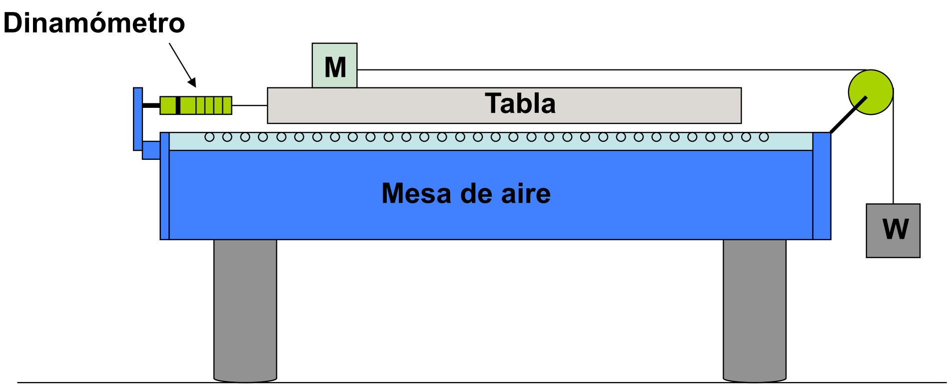


Figura 2.9: Montaje experimental utilizado para medir la fuerza de roce.

El experimento se realiza aumentando paulatinamente el peso suspendido y registrando la lectura del dinamómetro. Intuitivamente, el peso W transmite una fuerza al bloque M (a través de la tensión de la cuerda), y entonces el bloque M intentará deslizar respecto a la tabla. Sin embargo, la fuerza de roce entre el bloque y la tabla evita en un principio este movimiento. En este régimen, la fuerza de roce es igual en magnitud a la fuerza aplicada sobre el bloque M.

Para un cierto valor crítico del peso suspendido, el bloque comienza a deslizar sobre la tabla. En ese instante la lectura en el dinamómetro disminuye levemente. Luego, se sigue aumentando el peso suspendido, lo que ocasiona que la velocidad del bloque sea cada vez mayor. Sin embargo, a pesar de que la velocidad del bloque aumenta, la lectura en el dinamómetro presenta sólo leves variaciones aleatorias. Finalmente cuando la velocidad del bloque es muy grande, la lectura en el dinamómetro tiende a

[4] *dinamómetro:* instrumento utilizado para medir la magnitud de una fuerza

aumentar. El resultado de este experimento se representa gráficamente en el gráfico de la figura 2.10.

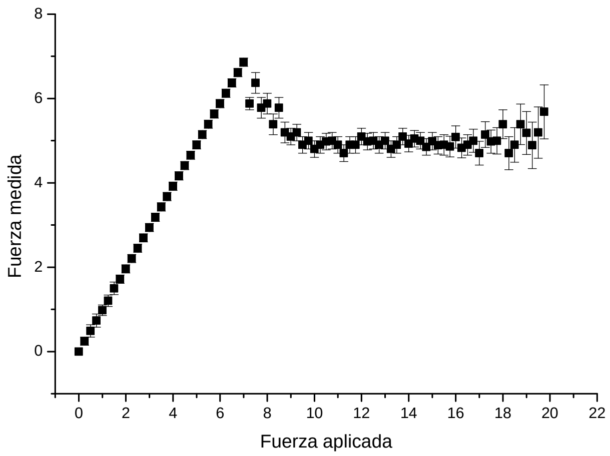


Figura 2.10: Comportamiento de la fuerza de roce entre dos cuerpos.

El comportamiento de la fuerza de roce se clasifica en 2 regímenes distintos, que llamamos estático (cuando el bloque no se mueve) y cinético (cuando el bloque desliza). Note que la fuerza de roce estática es variable y posee un valor máximo que marca la transición hacia un roce cinético. Por otro lado, la fuerza de roce cinética es prácticamente constante y de magnitud menor que la máxima fuerza de roce estática. Empíricamente se ha observado que para dos superficies en contacto, tanto la magnitud de la fuerza de roce cinética f_c como el valor máximo de la fuerza estática f_{max}, son proporcionales a la magnitud de la fuerza normal entre ambas superficies, es decir

$$f_c = \mu_c N$$

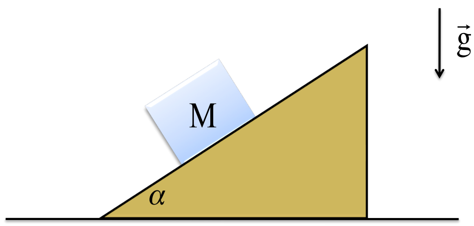
$$f_{max} = \mu_e N,$$

donde μ_c, μ_e son los coeficientes de roce, siempre inferiores a uno, y $\mu_c < \mu_e$. La fuerza de roce siempre actúa en la dirección paralela al movimiento relativo entre las dos superficies, con sentido opuesto al del movimiento.

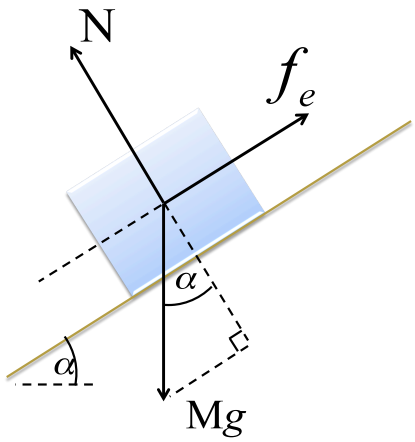
Ejemplo 2.1

Considere nuevamente el caso del bloque en reposo sobre el plano inclinado de la figura siguiente

Sabemos que la fuerza de roce entre el plano y el bloque es la que evita que este último deslize hacia abajo bajo la acción de la gravedad. Sin embargo, hemos visto que la fuerza de roce estática posee un valor máximo, y que si la componente del peso en la dirección paralela al plano inclinado es demasiado grande, el bloque inevitablemente comenzará a deslizar. Supongamos que el coeficiente de roce estático es μ_e, ¿para qué valores del ángulo α (entre 0 y 90 grados) el bloque permanecerá en reposo?.



Solución:
En la figura siguiente vemos el diagrama de fuerzas para el bloque.



El equilibrio de fuerzas en el eje X (paralelo al plano inclinado) nos da

$$f_e = Mg \sin \alpha .$$

Mientras que en el eje Y (perpendicular a X)

$$N = Mg \cos \alpha .$$

La fuerza de roce estática debe ser menor o igual a $\mu_e N$ (o de lo contrario el bloque caerá)

$$f_e = Mg \sin \alpha \leq \mu_e Mg \cos \alpha ,$$

y luego

$$\tan \alpha \leq \mu_e .$$

El bloque permanecerá en reposo siempre y cuando $0 \leq \alpha \leq \tan^{-1}(\mu_e)$.

Algunas aplicaciones de las leyes de Newton 2.3

La Máquina de Atwood. 2.3.1

La máquina de Atwood es un aparato conformado por dos bloques de masas M_1 y M_2, los cuales están conectados mediante una cuerda y una polea (disco en el cual se hace pasar la cuerda) tal como se muestra en la siguiente figura. El propósito de este aparato es obtener un movimiento con aceleración constante, cuyo valor puede ser manipulado mediante la elección de diferentes valores de las masas M_1 y M_2. Para visualizar mejor este hecho, resolveremos el problema y obtendremos una expresión para la aceleración en función de estas cantidades.

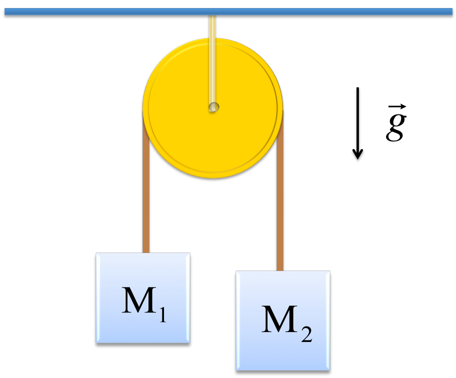


Figura 2.11: Máquina de Atwood.

Los DCLs para ambas masas se muestran en la figura 2.12. Note que hemos considerado que si el bloque de masa M_1 sube con aceleración a, entonces el bloque M_2 debe bajar con la misma aceleración. Esto es una consecuencia de que el largo de la cuerda es constante, y lo abordaremos con mayor detalle en 2.3.2.

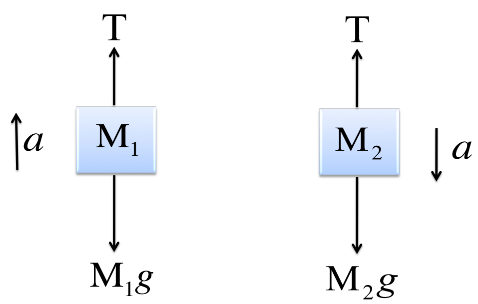


Figura 2.12: DCLs de la máquina de Atwood

Aplicando la segunda ley de Newton para ambos bloques se tiene que

$$T - M_1 g = M_1 a$$

$$M_2g - T = M_2a.$$

Con estas dos ecuaciones podemos obtener una expresión para la tensión y otra para la aceleración. Despejando T de la primera ecuación y evaluando en la segunda, se obtiene

$$M_2g - (M_1a + M_1g) = M_2a$$

$$(M_2 - M_1)g = (M_2 + M_1)a.$$

Así, se obtiene que la aceleración está dada por

$$a = \frac{(M_1 - M_2)g}{M_1 + M_2}.$$

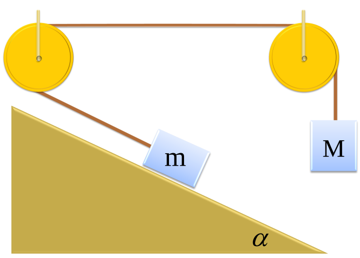
Tal como mencionamos anteriormente, el módulo de la aceleración de los cuerpos puede ser manipulado mediante la elección de diferentes valores de sus masas. Si se escoge bloques de masas iguales el sistema queda en reposo o se puede mover con velocidad constante ($a = 0$). Si se escogen valores de masa levemente diferentes la aceleración es pequeña, pero si se escogen valores de masa muy distintos entonces la aceleración es mayor. Note que nunca la aceleración puede ser mayor que g.

¿ENTENDISTEST? 2.1

Si una máquina de Atwood es ubicada en un ascensor que desciende con aceleración igual a g, ¿cuál será el valor de la tensión de la cuerda?

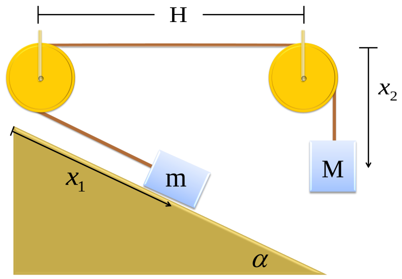
Movimientos ligados 2.3.2

La máquina de Atwood es un ejemplo de un movimiento ligado, ya que el movimiento de la masa M_1 está ligado o vinculado al movimiento de la masa M_2 mediante una cuerda que consideramos ideal. En este caso fue bastante intuitivo notar que cuando la masa M_1 sube con aceleración a, la masa M_2 debe descender con el mismo valor de aceleración. Sin embargo, nos veremos enfrentados a problemas de dos o más cuerpos vinculados donde la ecuación de ligadura no será tan sencilla de obtener. Para estos casos es muy útil emplear el método de análisis que expondremos en el siguiente ejemplo.

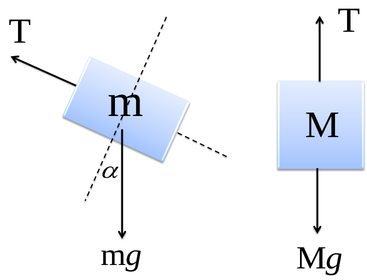


Considere el sistema mostrado en la figura, el que consiste de un bloque de masa *m* ubicado sobre un plano inclinado sin roce y de ángulo α, el que a su vez se encuentra unido a otro bloque de masa *M* mediante el sistema de poleas (fijas) y una cuerda (elementos considerados como ideales). Nos interesa conocer qué condición se debe cumplir para que el bloque de masa *m* baje deslizando por el plano inclinado.

Primero definiremos las coordenadas x_1 y x_2 como se muestra en la figura siguiente.



Luego el diagrama de cuerpo libre para cada bloque es



Para el bloque de masa M se tiene que

$$Mg - T = M\ddot{x}_2,$$

y para el bloque de masa m se tiene que

$$mg\sin(\alpha) - T = m\ddot{x}_1.$$

Ahora para resolver el problema sólo falta encontrar una relación entre las aceleraciones de los bloques, esto es, la llamada *ecuación de ligadura*. Para esto podemos notar que el largo de la cuerda puede ser escrito de la siguiente manera

$$L = H + x_2 + x_1.$$

Dado que la cuerda es ideal (no tiene masa y es inextensible), podemos decir que su largo *L* es constante. Por lo tanto si en un cierto intervalo, de tiempo Δt la coordenada x_1 cambia en una cantidad Δx_1, la coordenada x_2 cambiará en una cantidad Δx_2 tal que $\Delta x_1 = -\Delta x_2$. Luego dividiendo esta ultima relación por Δt se tiene que

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta x_2}{\Delta t}.$$

Luego podemos tomar el límite $\Delta t \to 0$, con lo que se obtiene que

$$\dot{x}_2 = -\dot{x}_1,$$

o también podemos decir que la rapidez del bloque de masa M es igual a la del bloque de masa m.

El resultado anterior puede ser obtenido directamente al derivar respecto al tiempo la expresión para el largo de la cuerda. Dado que el largo de la cuerda es constante, su derivada respecto al tiempo es cero y lo mismo pasa con la derivada de H

$$0 = 0 + \dot{x}_2 + \dot{x}_1$$

$$\to \quad \dot{x}_2 = -\dot{x}_1.$$

Luego, la relación entre las aceleraciones se obtiene simplemente al derivar nuevamente con respecto al tiempo

$$\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1.$$

Ahora podemos resolver el problema. Escribiendo todo en términos de $\ddot{x}_1$ obtenemos

$$T - Mg = M\ddot{x}_1$$

$$mg\sin(\alpha) - T = m\ddot{x}_1.$$

De la primera ecuación se obtiene,

$$T = Mg + M\ddot{x}_1.$$

Luego

$$\begin{aligned} mg\sin(\alpha) - Mg - M\ddot{x}_1 &= m\ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 &= \frac{mg\sin(\alpha) - Mg}{M+m} = -\ddot{x}_2. \end{aligned}$$

Finalmente, para que m baje por el plano inclinado se debe cumplir que $\ddot{x}_1 > 0$, esto es

$$mg\sin(\alpha) - Mg > 0$$

$$m\sin(\alpha) > M.$$

Dinámica del Movimiento Circular 2.4

En la sección 1.2.9 estudiamos la cinemática de un cuerpo que se mueve a lo largo de una trayectoria circular. Concluimos que una partícula restringida a moverse en una trayectoria circular y cuya aceleración angular es constante tiene una aceleración dada por:

$$\vec{a}(t) = R(\alpha\hat{\theta} - \omega^2\hat{r}). \tag{2.2}$$

El módulo de este vector aceleración es $\left\|\vec{a}(t)\right\| = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$. Consideremos primero el caso en que no existe aceleración angular ($\alpha = 0$). Entonces, no habrá aceleración en la dirección tangencial mientras que la aceleración radial apuntará hacia el interior del círculo y tendrá una magnitud $|\vec{a}(t)| = R\omega^2$. A esta última la llamamos aceleración centrípeta.

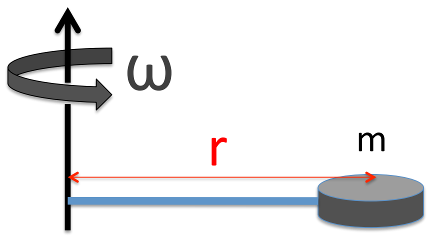


Figura 2.13: Cuerpo de masa m que rota con velocidad angular constante mediante la acción de una cuerda.

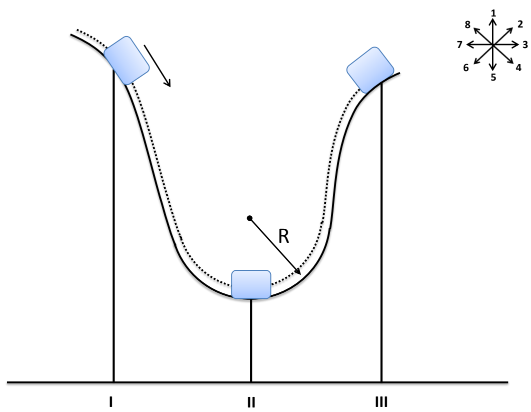
Un ejemplo en el que sólo existe aceleración centrípeta es el caso de una masa m que gira con velocidad angular constante ω atada a una cuerda como se muestra en la Fig. (2.13) (imagine un lanzador de bala). Como la única fuerza que actúa sobre la masa es la tensión de la cuerda, de acuerdo con la segunda ley de Newton concluimos que:

$$\vec{T} = m\vec{a} = -mR\omega^2\hat{r} = -\frac{mv^2}{R}\hat{r}. \tag{2.3}$$

En la última igualdad hicimos uso de la relación $v = R\omega$.

¿ENTENDISTEST? 2.2

¿Cuál de las flechas del diagrama representa mejor la dirección de la aceleración cuando el bloque pasa por la posición II?



Ejemplo 2.2

Una pequeña moneda de masa *m* se ubica sobre la superficie horizontal de un disco giratorio, a una distancia *r* del centro de éste, tal como se muestra en la figura (2.14). Si el disco comienza a girar desde el reposo con una aceleración constante α, encuentre una expresión para el coeficiente de roce estático entre la moneda y la superficie del disco, de manera tal que la moneda resbale justo cuando el disco ha dado exactamente *N* vueltas.

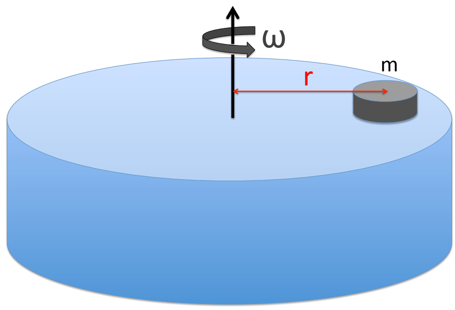


Figura 2.14: Moneda de masa *m* ubicada sobre un disco giratorio.

Solución

Lo primero que debemos determinar es la velocidad angular que tiene la moneda al momento de resbalar. Recordemos primero que para un movimiento uniformemente acelerado tenemos,

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha}{2}t^2. \tag{2.4}$$

Ahora, como $\theta_0 = 0$ y $\omega_0 = 0$, justo al momento de resbalar tenemos $\theta(\tilde{t}) = 2\pi N = \alpha\tilde{t}^2/2$. De esta forma obtenemos la velocidad angular deseada,

$$\omega(\tilde{t}) = \alpha\tilde{t} = \sqrt{4\pi N\alpha}. \tag{2.5}$$

En ese momento la fuerza de roce total que ejerce la superficie sobre la moneda en la dirección horizontal es:

$$\vec{F} = m\vec{a}(\tilde{t}) = mR(\alpha\hat{\theta} - 4\pi N\alpha\hat{\rho}). \tag{2.6}$$

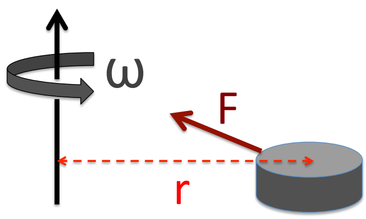


Figura 2.15: Fuerza sobre la moneda.

La dirección aproximada de esta fuerza se puede ver en la figura (2.15). Como sabemos que desliza justo en ese momento, entonces la magnitud de la fuerza debe ser igual a $\mu_e N = \mu_e mg$. Finalmente tenemos entonces que el coeficiente de roce estático debe ser:

$$\mu_e = \frac{R\alpha}{g}\sqrt{1 + 16\pi^2 N^2}. \tag{2.7}$$

Ejemplo 2.3

Se ubica un pequeño objeto de masa m sobre una superficie cónica rotatoria, a una distancia r del eje de rotación como se indica en la figura (2.16). Si el ángulo entre la superficie y la horizontal es θ y el coeficiente de roce estático entre el objeto y la superficie es μ_e, calcule la velocidad angular máxima del cono alrededor del eje vertical para que el objeto no resbale. Suponga que los cambios de velocidad angular se realizan muy lentamente.

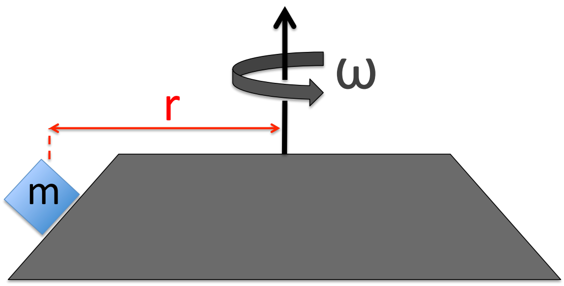


Figura 2.16: Bloque de masa M sobre un cono rotatorio.

Solución

Para resolver este problema conviene primero dibujar el diagrama de cuerpo libre para la masa m como se puede ver en la figura (2.17). Vemos que el cuerpo está sometido a la fuerza de gravedad, a la fuerza normal y a la fuerza de roce. Como nos interesa la situación en que el objeto está a punto de deslizar consideramos que $F_r = \mu_e N$. Ahora, dado que no hay aceleración en la dirección vertical tenemos:

$$mg = N\cos\theta + \mu_e N \operatorname{sen}\theta \quad \rightarrow \quad N = \frac{mg}{\cos\theta + \mu_e \operatorname{sen}\theta} \tag{2.8}$$

Por otra parte, sabemos que la resultante total de la componente radial de la fuerza debe ser capaz de producir la aceleración centrípeta. Esto es,

$$mr\omega^2 = \mu_e N\cos\theta - N\sin\theta. \tag{2.9}$$

Reemplazando ahora el resultado para N obtenido anteriormente tenemos que la velocidad angular máxima para la cual la masa no alcanza a deslizar es :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}\frac{\mu_e\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \mu_e \operatorname{sen}\theta}}. \tag{2.10}$$

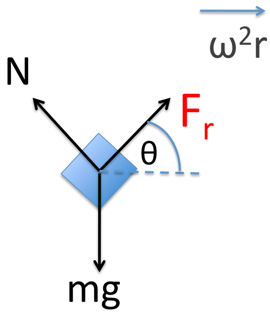
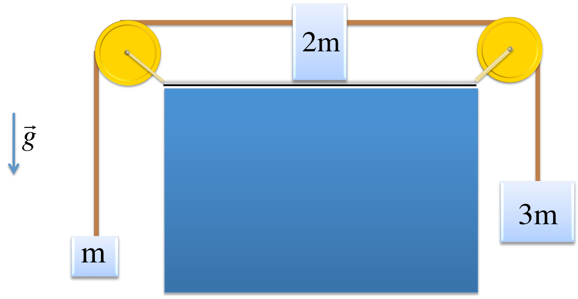


Figura 2.17: DCL de bloque de masa *M* sobre un cono rotatorio.

Problemas resueltos 2.5

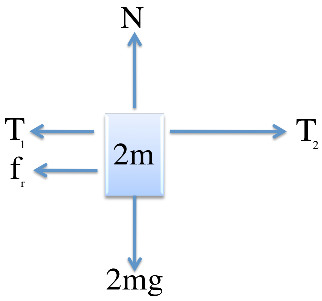
Problema 2.1

Considere el sistema de tres bloques con masas m, $2m$ y $3m$, los que están unidos por cuerdas ideales que pasan por poleas ideales, ubicados en una mesa horizontal como se muestra en la figura. Determine el mínimo valor del coeficiente de roce estático entre el bloque de masa $2m$ y la superficie de la mesa para que el sistema permanezca en reposo.



Solución

Para resolver el problema es conveniente primero realizar el diagrama de cuerpo libre para el bloque de masa $2m$, el cual se presenta en la figura siguiente.



Dado que el bloque está en reposo se debe cumplir que,

$$T_1 + f_r = T_2,$$

donde $T_1 = mg$ y $T_2 = 3mg$. Luego el mínimo valor del coeficiente de roce, es tal que

$$\mu_e N = 2mg,$$

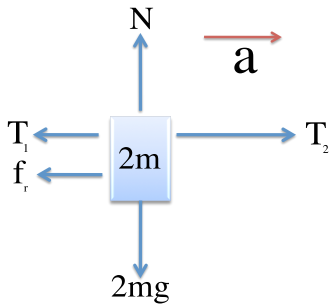
Considerando que $N = 2mg$, de la ecuación anterior se obtiene que el mínimo valor del coeficiente de roce debe ser $\mu_e = 1$.

Problema 2.2

Considere nuevamente el sistema de tres bloques del problema 2.1. Determine la aceleración del sistema si el coeficiente de roce estático entre el bloque de masa $2m$ y la superficie de la mesa es $\mu_e = 0,5$.

Solución

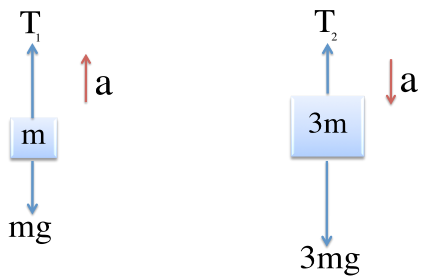
Para este caso el diagrama de cuerpo libre para el bloque de masa $2m$ es similar al anterior, pero aquí el bloque tiene aceleración.



Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección horizontal, se obtiene que

$$T_2 - T_1 - f_r = 2ma. \tag{2.11}$$

Es importante notar que ahora $T_1 \neq mg$ y $T_2 \neq 3mg$. Esto queda de manifiesto al analizar los DCLs de ambos bloques, que se presentan en la figura siguiente.



De estos DCLs obtenemos que

$$T_1 - mg = ma \tag{2.12}$$

$$3mg - T_2 = 3ma. \tag{2.13}$$

Note que hemos sido consecuentes en todos los DCLs al representar la dirección de la aceleración. Ahora despejando T_1 y T_2 de las ecuaciones anteriores y evaluando en la ecuación 2.11,

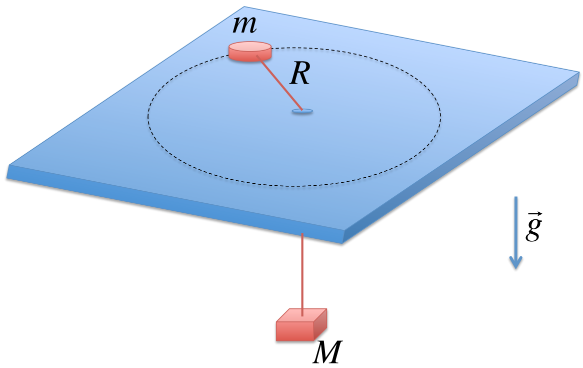
$$3mg - 3ma - (ma + mg) - f_r = 2ma \rightarrow 2mg - f_r = 6ma, \tag{2.14}$$

Luego considerando que $f_r = \mu_e N = mg$, se obtiene que la aceleración del sistema está dada por

$$a = g/6. \tag{2.15}$$

Problema 2.3

Una partícula de masa m se mueve describiendo una trayectoria circular de radio R sobre una superficie horizontal sin roce debido a la acción de una cuerda que está conectada a ella. La cuerda, que atraviesa la superficie horizontal por un orificio sin rozamiento, en su otro extremo está conectada a un bloque colgante de masa M, tal como se muestra en la figura. Determine la velocidad angular de la partícula de masa m en el instante en cuestión.



Solución

Considerando que la trayectoria que describe la partícula de masa m es circular, el módulo de la aceleración radial se relaciona con el módulo de la velocidad angular mediante la ecuación $a_r = \omega^2 R$. Luego, la segunda ley de Newton establece que esta aceleración es generada por la tensión de la cuerda, con lo que se obtiene

$$T = ma_r \rightarrow T = m\omega^2 R,$$

pero la tensión la podemos relacionar con el bloque de masa M considerando que éste último está en equilibrio. Por lo tanto, $T = Mg$, y remplazando este valor en la ecuación anterior se obtiene que la velocidad angular está dada por

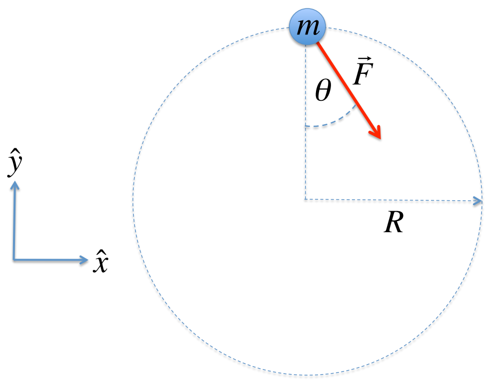
$$\omega = \sqrt{\frac{Mg}{mR}}. \tag{2.16}$$

Problema 2.4

Una partícula de masa m se mueve describiendo una trayectoria circular de radio R, en el sentido horario. En cierto instante la fuerza neta actuando sobre la partícula es $\vec{F}$, tal como se muestra en la figura. Determine una expresión para la velocidad y la aceleración tangencial de la partícula en ese instante.

Solución

La aceleración que tiene la partícula en ese instante está determinada por la fuerza



aplicada, por lo tanto escrita en termino de sus componentes radial y tangencial nos queda

$$\vec{a} = \frac{F\cos\theta}{m}(-\hat{y}) + \frac{F\sin\theta}{m}\hat{x}, \tag{2.17}$$

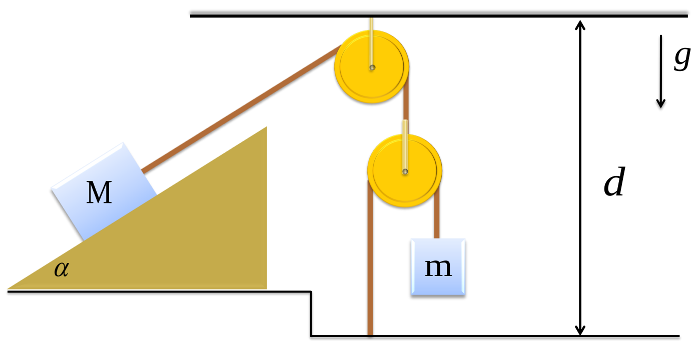
donde el módulo de la componente radial es $a_r = \frac{F\cos\theta}{m}$ y el de la componente tangencial es $a_t = \frac{F\sin\theta}{m}$.

Considerando que la trayectoria que describe la partícula es circular, el módulo de la aceleración radial se relaciona con el módulo de la velocidad tangencial mediante la ecuación $a_r = \frac{v^2}{R}$, por lo tanto dado que el movimiento es en sentido horario se obtiene que la velocidad está dada por

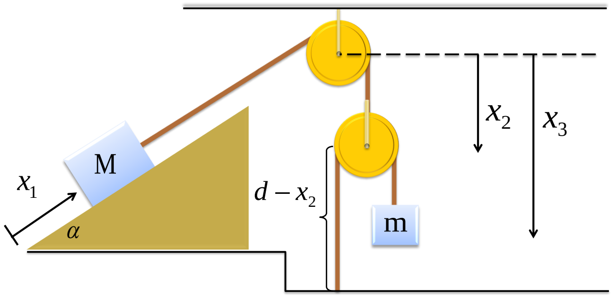
$$\vec{v} = \sqrt{\frac{RF\cos\theta}{M}}\hat{x}.$$

Problema 2.5

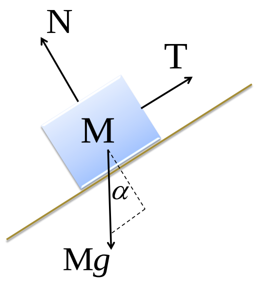
En el sistema de la figura el bloque de masa M se puede deslizar por la superficie lisa de una cuña de ángulo α y está unido mediante una cuerda y un sistema de poleas ideales, a un bloque de masa m que se mueve a lo largo de la vertical. Encuentre la aceleración de ambos bloques.



Solución
A continuación se ilustran las coordenadas relevantes definidas para este problema. Note que la polea que sostiene a la masa m puede desplazarse a lo largo de la vertical.



El DCL para la masa M se muestra en la figura siguiente

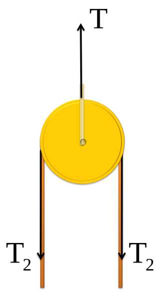


Al aplicar la segunda ley de Newton al bloque de masa M en la dirección del eje del plano inclinado, se obtiene

$$T - Mg\sin\alpha = M\ddot{x}_1.$$

Note que aquí $\ddot{x}_1$ representa la aceleración del bloque de masa M, y será positiva si el bloque sube acelerando por el plano inclinado.

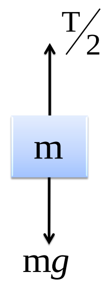
Para la polea que sostiene al bloque de masa m se tiene que



$$2T_2 = T \rightarrow T_2 = \frac{T}{2}.$$

Luego, para el bloque de masa m tenemos que

$$mg - \frac{T}{2} = m\ddot{x}_3.$$



Además, el largo de la cuerda que une la polea móvil con el bloque de masa m es constante, por lo tanto

$$d - x_2 + x_3 - x_2 = l_2 \rightarrow \ddot{x}_3 = \ddot{2}x_2.$$

El largo de la cuerda que une el bloque de masa M con la polea móvil también es constante

$$l_1 = x_2 - x_1 + cte \rightarrow \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1.$$

Resolviendo

$$\frac{1}{M}T - g\sin\alpha = \ddot{x}_1$$

$$mg - \frac{T}{2} = m\ddot{x}_3 \rightarrow T = 2m(g - \ddot{x}_3) = 2m(g - 2\ddot{x}_1)$$

Finalmente, encontramos las aceleraciones de ambos bloques

$$\frac{2m}{M}(g - 2\ddot{x}_1) - g\sin\alpha = \ddot{x}_1$$

$$\frac{g\left(\frac{2m}{M} - \sin\alpha\right)}{\left(\frac{M+4m}{M}\right)} = \ddot{x}_1$$

$$\ddot{x}_3 = 2\ddot{x}_1.$$

Problema 2.6

Un helicóptero carga dos objetos de masas m_1 y m_2 como se ilustra en la Fig. 2.18. El helicóptero acelera verticalmente hacia arriba con aceleración a. Determine la tensión en las cuerdas que sujetan el cuerpo de masa m_1.

Solución

Definimos las coordenadas que se muestran en la Fig. 2.19 para referirnos a las posiciones de ambos bloques y el diagrama de cuerpo libre para éstos se muestra en la Fig. 2.20.

Para el bloque de masa m_2 se tiene que

$$T_2 - m_2 g = m_2 a \rightarrow T_2 = m_2(a + g),$$

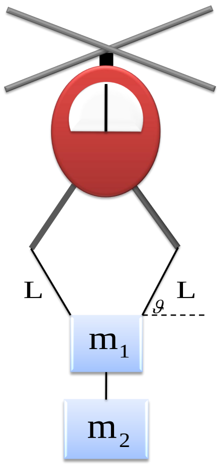


Figura 2.18: Esquema de un helicóptero trasladando dos objetos de masa m_1 y m_2.

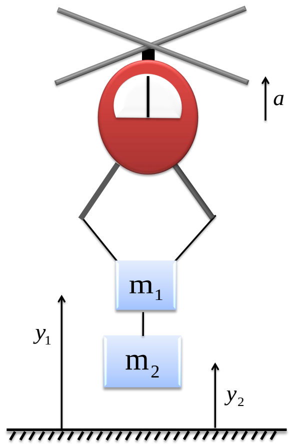


Figura 2.19: Definición de coordenadas para las posiciones de ambos bloques.

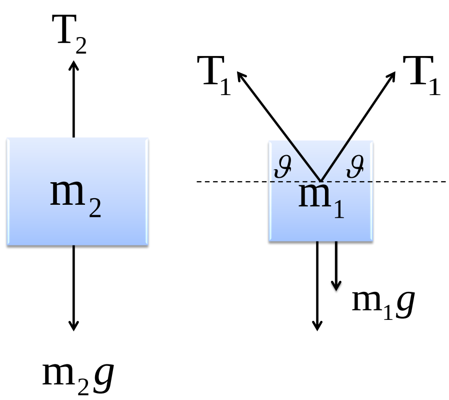


Figura 2.20: DCLs de ambos bloques.

y para el bloque de masa m_1

$$T_1 \sin\vartheta + T_1 \sin\vartheta - m_1 g - T_2 = m_1 a.$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene que

$$2T_1 \sin\vartheta - m_1 g - m_2(a+g) = m_1 a$$

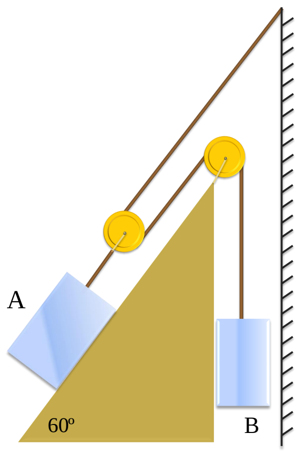
$$2T_1 \sin\vartheta = m_1(a+g) + m_2(a+g).$$

Finalmente, la tensión en cada una de las cuerdas que sujetan el cuerpo de masa m_1 es

$$T_1 = \frac{(m_1 + m_2)(a+g)}{2\sin\vartheta}.$$

Problema 2.7

Los bloques A y B de la figura tienen masas m y M respectivamente. El bloque A se desliza por un plano inclinado en un ángulo de $\pi/3$ (60º) respecto a la horizontal. El coeficiente de roce cinético entre el bloque A y el plano es de $\mu = 0.2$. Determine las aceleraciones de ambos bloques y la tensión de la cuerda (considere que la cuerda y poleas son ideales).



Solución
En la siguiente figura se ilustran las coordenadas que se utilizarán, y además algunas fuerzas relevantes para el problema

Para el bloque de masa M se tiene que

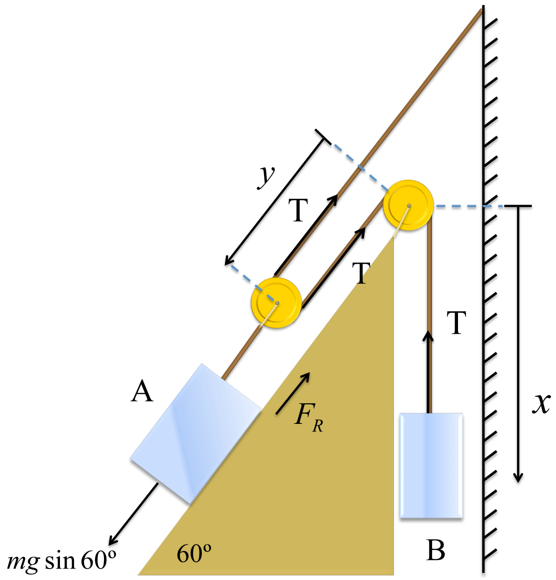
$$Mg - T = M\ddot{x},$$

y para el bloque de masa m

$$-2T + mg\sin\vartheta - \mu_d mg\cos\vartheta = m\ddot{y}.$$

Además, la cuerda es inextensible, de modo que la condición de ligadura es

$$x + 2y + c = L,$$



donde c es una contante, por lo tanto

$$\ddot{x} = -2\ddot{y}.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anteriores,

$$-2Mg + 2M\ddot{x} + mg\sin\vartheta - \mu_d mg\cos\vartheta = m\ddot{y}$$

$$2Mg - mg\sin\vartheta + \mu_d mg\cos\vartheta = (4M + m)\,\ddot{y}.$$

Con esto, las aceleraciones de los bloques están dadas por

$$\ddot{y} = \frac{g\,(m\sin\vartheta - \mu m\cos\vartheta - 2M)}{4M + m}$$

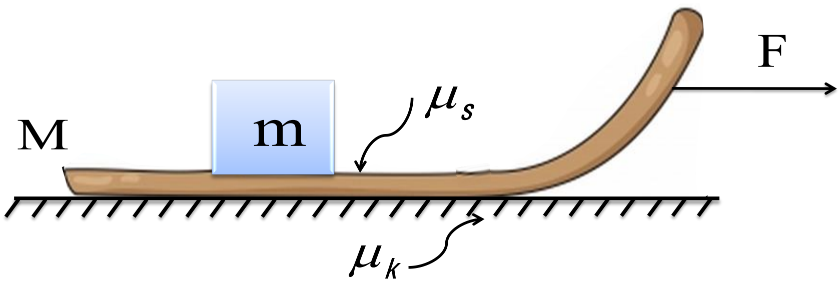
$$\ddot{x} = -2\ddot{y}.$$

y la tensión de la cuerda es

$$T = Mg + 2M\ddot{y} = \frac{mMg}{4M + m}\,(1 + 2\sin\vartheta - 2\mu\cos\vartheta)\,.$$

Problema 2.8

Un trineo de masa M tiene una caja de masa m sobre él. Si el coeficiente de roce estático entre la superficie del trineo y la caja es μ_s, y el coeficiente de roce cinético entre el trineo y el piso es μ_k, ¿Cuál es la fuerza máxima que se le puede imprimir al trineo de manera que la caja no resbale?

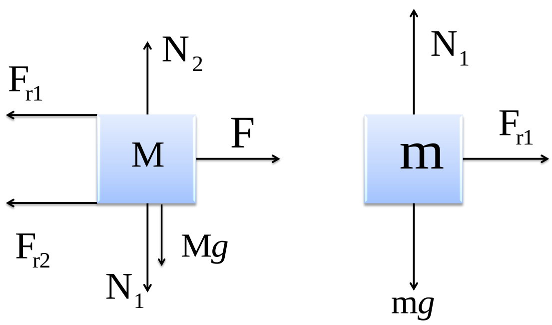


Solución

Los diagramas de cuerpo libre para la caja se presentan en la figura siguiente. Por acción y reacción, la caja de masa m ejerce sobre el trineo las fuerzas N_1 (hacia abajo) y F_{r1} (hacia la izquierda). La segunda ley de Newton aplicada a la caja establece que

$$N_1 = mg$$

$$F_{r1} = m\ddot{x}$$



Para que la caja no resbale se debe cumplir que

$$F_{r1} \leq \mu_s mg$$

$$\rightarrow m\ddot{x} \leq \mu_s mg.$$

de donde se obtiene que

$$\ddot{x}_{max} = \mu_s g.$$

Aplicando la segunda ley de Newton al trineo,

$$N_2 = N_1 + M_g \rightarrow N_2 = (M + m)g \rightarrow F_{r2} = \mu_k(m + M)g$$

$$F - F_{r1} - F_{r2} = M\ddot{x},$$

donde hemos considerado que la aceleración del trineo es la misma que la de la caja (se mueven juntos). Luego

$$F = M\ddot{x} + F_{r1} + F_{r2}.$$

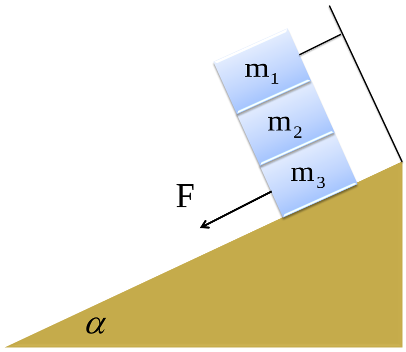
Así, el máximo valor posible está dado por

$$F = M(\mu_s g) + \mu_s mg + \mu_k(m + M)g$$

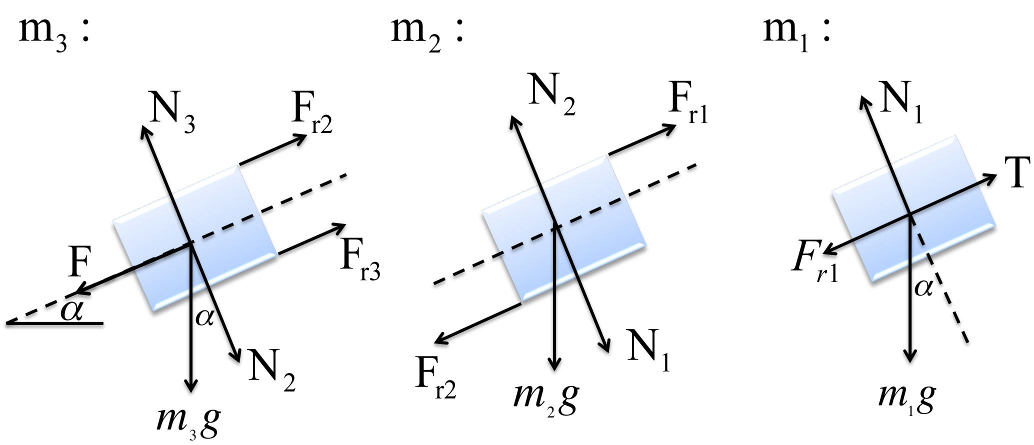
$$F = (m + M)g(\mu_s + \mu_k).$$

Problema 2.9

Considere tres cuerpos, de masas m_1, m_2 y m_3, dispuestos tal como se muestra en la figura. Considere que entre los cuerpos de masa m_1 y m_2 existe un coeficiente de roce estático μ_{S1}, y que entre los cuerpos de masa m_2 y m_3 el coeficiente es μ_{S2}. Entre el cuerpo de masa m_3 y la superficie de la cuña, el coeficiente de roce estático es μ_{S3}. Determine una expresión para el máximo valor de la fuerza F que se puede aplicar al cuerpo de masa m_3 sin alterar el equilibrio de los tres cuerpos.



Solución
Comenzamos dibujando los diagramas de cuerpo libre para cada bloque, los cuales se muestran en la figura siguiente



Para el bloque de masa m_1 las ecuaciones de equilibrio son

$$F_{r1} - T + m_1 g \sin\alpha = 0$$

$$N_1 = m_1 g \cos\alpha,$$

y dado que la fuerza de roce es estática, tenemos que

$$F_{r1} \leq N_1 \mu_{S1} = m_1 g \cos\alpha \mu_{S1}.$$

Para el bloque de masa m_2 se tiene que

$$F_{r12} - F_{r1} + m_2 g \sin\alpha = 0$$

$$N_2 - N_1 - m_2 g \cos\alpha = 0.$$

Utilizando la expresión previamente obtenida para N_1, la segunda ecuación la podemos escribir como

$$N_2 = m_1 g \cos\alpha + m_2 g \cos\alpha \rightarrow N_2 = (m_1 + m_2) g \cos\alpha.$$

Luego para la fuerza de roce F_{r2} se debe cumplir que

$$F_{r2} \leq (m_1 + m_2) g \cos\alpha \mu_{S2}.$$

Para el bloque de masa m_3 primero desarrollaremos la ecuación de equilibrio en el eje perpendicular al plano, que está dada por

$$N_3 - N_2 - m_3 g \cos\alpha = 0.$$

Utilizando la expresión obtenida para N_2, la ecuación anterior nos queda así,

$$N_3 = (m_1 + m_2 + m_3) g \cos\alpha.$$

Dado lo anterior, para F_{r3} podemos escribir que

$$F_{r3} \leq (m_1 + m_2 + m_3) g \cos\alpha \mu_{S3}.$$

Ahora analizando la condición de equilibrio para el bloque de masa m_3 en el eje paralelo al plano inclinado,

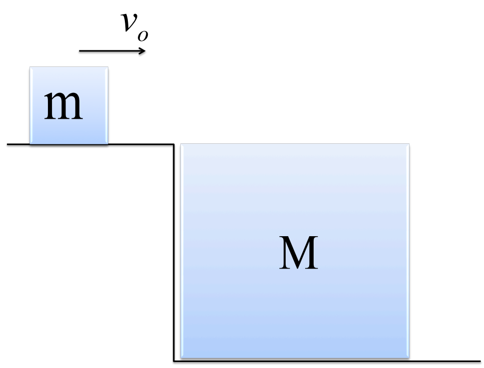
$$F - F_{r12} - F_{r3} + m_3 g \sin\alpha = 0 \rightarrow F = F_{r12} + F_{r3} - m_3 g \sin\alpha = 0,$$

y en base a esta última ecuación se deduce que la fuerza aplicada debe satisfacer la siguiente desigualdad

$$F \leq (m_1 + m_2) g \cos\alpha \mu_{S2} + (m_1 + m_2 + m_3) g \cos\alpha \mu_{S3} - m_3 g \sin\alpha.$$

Problema 2.10

Una caja de masa m se mueve con rapidez v_0 sobre una superficie horizontal sin roce y al final de su camino logra posicionarse sobre un bloque de masa M, tal como se representa en la figura. El bloque se puede deslizar sin roce sobre el hielo y el coeficiente de roce entre la caja y el bloque es μ. Si la caja se desliza sobre el bloque hasta que finalmente queda en reposo con respecto a éste, determine:



a) ¿Cuánto tiempo transcurre desde que la caja comienza a posicionarse sobre el bloque y queda en reposo respecto a este?

b) ¿Cuál es la velocidad del conjunto una vez que la caja queda en reposo?

c) ¿Qué distancia recorre la caja sobre el bloque durante el intervalo de tiempo referido en (a)?

Solución
a)En la Fig. 2.21 se definen dos coordenadas horizontales apropiadas para describir el problema, y en la Fig. 2.22 se muestran los DCL para la caja y el bloque.

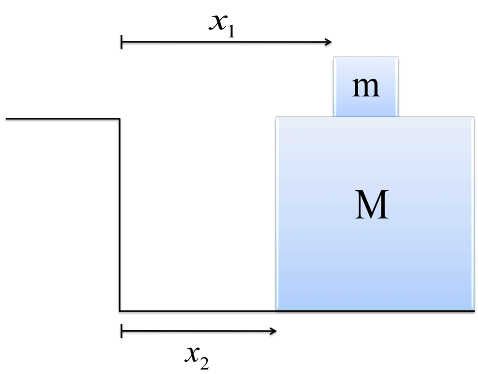


Figura 2.21: Definiendo coordenadas apropiadas.

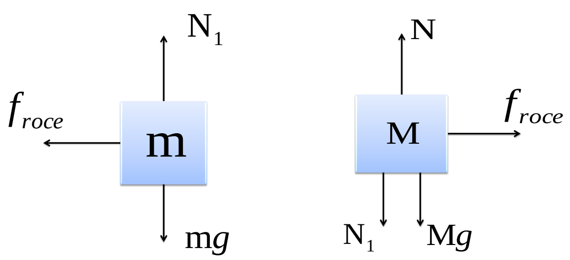


Figura 2.22: Diagramas de cuerpo libro para la caja y para el bloque.

Del diagrama de cuerpo libre para la caja obtenemos que

$$N_1 = mg$$

$$-f_{roce} = m\ddot{x}_1 \rightarrow -\mu g = \ddot{x}_1,$$

y del DCL para el bloque se desprende que

$$N = (M + m)g$$

$$\mu mg = M\ddot{x}_2.$$

Luego las aceleraciones de ambas masas son constantes y están dadas por

$$\ddot{x}_1 = -\mu g$$

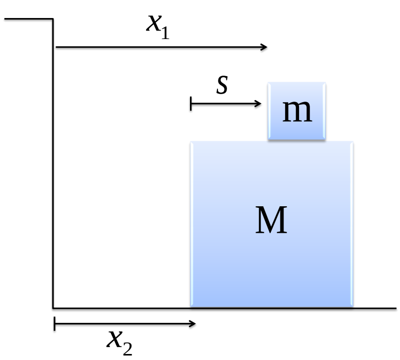
$$\ddot{x}_2 = \frac{\mu mg}{M}.$$

Con esto podemos obtener las velocidades a partir de la expresión que relaciona la velocidad y la aceleración en un movimiento uniformemente acelerado, por lo tanto

$$\dot{x}_1(t) = -\mu gt + v_0$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{\mu mg}{M}t.$$

Para determinar el tiempo que transcurre desde que la caja comienza a posicionarse sobre el bloque y queda en reposo respecto a este, utilizaremos la coordenada s indicada en la figura siguiente



donde

$$s(t) = x_1(t) - x_2(t).$$

La velocidad relativa es entonces,

$$\dot{s}(t) = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)$$

$$\dot{s}(t) = -\left(\mu g + \frac{\mu mg}{M}\right)t + v_0$$

En este caso buscamos $t^* \in \mathbb{R}$ tal que $\dot{s}(t^*) = 0$, cuya solución en este caso es

$$t^* = \frac{v_0 M}{\mu g(M + m)}.$$

Por supuesto este resultado es válido siempre y cuando el largo del bloque sea el suficiente como para que la caja no caiga al suelo. Note que si $\lim_{M\to\infty} t^* = \frac{v_0}{\mu g}$, que corresponde al caso de un cuerpo de masa m deslizando sobre un plano (bloque de masa infinita).

b) La velocidad del conjunto en el instante en que la caja deja de deslizarse sobre el bloque es

$$v = \dot{x}_2(t)\Big|_{t=t^*} = \frac{v_0 m}{M+m}.$$

c) La distancia que recorre la caja sobre el bloque durante el intervalo de tiempo referido en (a) se obtiene a partir de

$$s(t) = v_0 t - \frac{\mu g(M+m)}{2M}t^2,$$

evaluando en el tiempo en cuestión. Por lo tanto

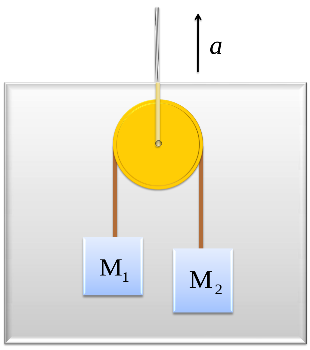
$$d = \frac{v_0^2 M}{\mu g(M+m)} - \frac{\mu g(M+m)}{2M}\frac{v_0^2 M^2}{(\mu g)^2(M+m)^2}$$

$$\to d = \frac{v_0^2 M}{2\mu g(M+m)}$$

Note que se debe cumplir que el largo del bloque sea superior a d.

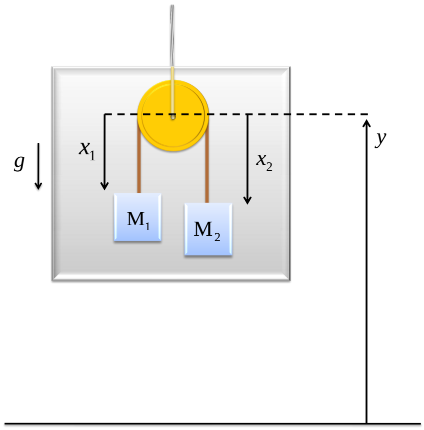
Problema 2.11

Una máquina de Atwood formada por dos bloques de masa M_1 y M_2, una polea y una cuerda ideales, se cuelga del techo de un ascensor tal como se muestra en la figura. Si en cierto instante el ascensor comienza a subir con una aceleración a, en presencia de la fuerza de gravedad, determine una expresión para la tensión de la cuerda en la máquina de Atwood en función de los datos del problema.

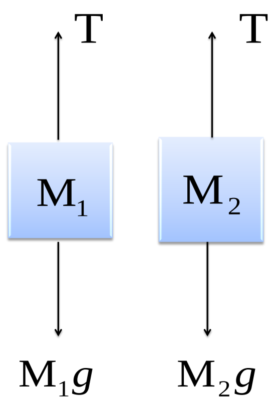


Solución

Definiremos las coordenadas x_1 y x_2 respecto al sistema no inercial de la polea, e y como la altura de la polea con respecto a un sistema inercial.



Los diagramas de fuerza para ambos bloques son los siguientes,



De acuerdo a la segunda ley de Newton se tiene que

$$T - M_1 g = M_1 \frac{d^2}{dt^2}(y - x_1)$$
$$T - M_1 g = M_1 a - M_1 \ddot{x}_1,$$

donde esta última ecuación puede ser escrita como

$$M_1(g + a) - T = M_1 \ddot{x}_1.$$

Esta es la misma ecuación que se habría obtenido con el sistema en un marco de referencia inercial, con aceleración de gravedad igual a $g + a$. Es decir, la máquina de Atwood se comporta como si estuviera sometida a un campo gravitacional más fuerte (si $a > 0$). Esto es fácil de percibir cuando nos subimos en un ascensor.

Del mismo modo, para el cuerpo de masa M_2 se obtiene que

$$T - M_2 g = M_2 \frac{d^2}{dt^2}(y - x_2)$$

$$T - M_2 g = M_2 a - M_2 \ddot{x}_2.$$

Luego, la condición de ligadura en este caso es

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2,$$

por lo tanto

$$T = M_1(a+g) - M_1\ddot{x}_1$$
$$T = M_2(a+g) + M_2\ddot{x}_1.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, se obtiene que la aceleración y la tensión de la cuerda son

$$\ddot{x}_1 = \frac{(M_1 - M_2)(a+g)}{M_1 + M_2}$$
$$T = \frac{(a+g)}{M_1 + M_2} 2M_1M_2.$$

Note que en el caso en que el ascensor baja con aceleración $a = -g$, esto es, el ascensor cae en caída libre, se obtiene que

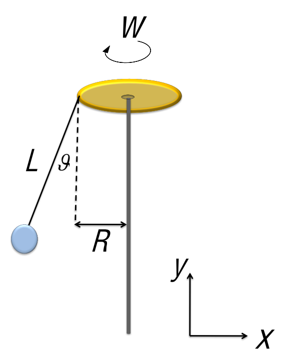
$$\ddot{x}_1 = 0$$

$$T = 0.$$

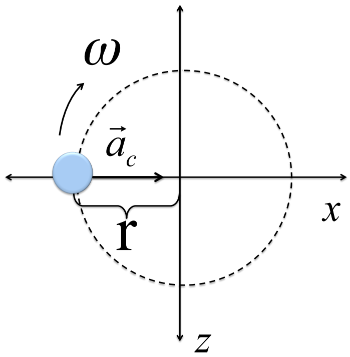
En este caso la máquina de Atwood se comporta de la misma manera que en el caso en que no hubiera gravedad.

Problema 2.12

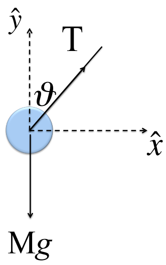
Un carrusel está formado por una serie de asientos que giran colgados de cadenas sujetas a un disco central que puede girar. En la figura siguiente se representa el disco y solo un asiento con su respectiva cadena. Si se desea que el carrusel gire a velocidad angular constante w, ¿Qué longitud L tienen que tener las cadenas para que el ángulo que formen con la vertical sea $\vartheta = \pi/6$? Desprecie la masa de las cadenas.



Solución
El movimiento de un asiento para un instante en el cual el disco ya está girando y el asiento ha alcanzado su posición estacionaria, es el siguiente



Este corresponde a un movimiento circular uniforme. Luego el DCL para el asiento se muestra a continuación



En la dirección del eje y el sistema tiene aceleración nula, por lo tanto se cumple que

$$T\cos\vartheta - Mg = 0 \rightarrow T = \frac{Mg}{\cos\vartheta},$$

y en el eje x el sistema tiene la aceleración centrípeta, por lo tanto

$$T\sin\vartheta = Mw^2 r \rightarrow T\sin\vartheta = Mw^2\left(R + L\sin\vartheta\right).$$

De las ecuaciones anterior obtenemos una relación entre el largo L y el ángulo ϑ

$$Mg\tan\vartheta = Mw^2 R + Mw^2 L\sin\vartheta$$

$$L = \frac{g\tan\vartheta - w^2 R}{w^2\sin\vartheta}$$

Finalmente, para que $\vartheta = \pi/6$,

$$L = \frac{2\left(g/\sqrt{3} - w^2 R\right)}{w^2}.$$

3

Trabajo y Energía

El objetivo fundamental de la mecánica clásica es la predicción del movimiento de un cuerpo una vez que se conocen sus interacciones (fuerzas) con su entorno. En principio esto siempre se puede lograr a partir de la segunda ley de Newton: la aceleración permite determinar la velocidad, y a su vez ésta permite obtener la posición. Este esquema funciona bien si conocemos la fuerza total sobre el objeto en función del tiempo. Sin embargo, en muchas ocasiones la información que tenemos a priori es insuficiente. Imaginemos, por ejemplo, que la fuerza sobre un objeto depende de su posición. Por lo tanto, conocer $\vec{F}$ en función del tiempo requiere conocer la posición del objeto en función del tiempo; pero es precisamente esta última la incógnita que queremos determinar.

Bajo estas circunstancias, muchas veces es conveniente utilizar los dos conceptos principales de este capítulo para predecir el movimiento de un cuerpo: **trabajo** y **energía**. Veremos que más allá de ser una enorme ayuda para resolver problemas, estos conceptos tienen además un importante significado físico. Por ejemplo, la ley de conservación de la energía es uno de los pilares fundamentales de la física moderna, y su validez es más general que la mecánica de Newton. En el S.I. la unidad de energía y de trabajo es el "Joule" ($1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$).

Teorema de Trabajo y Energía Cinética 3.1

Pensemos primero en la situación más simple posible. En $t = 0$ tenemos una masa puntual m en el origen cuya velocidad inicial es $\vec{v}_i$ y que está sometida a una fuerza constante $\vec{F}$ como se muestra en la Fig. (3.1).

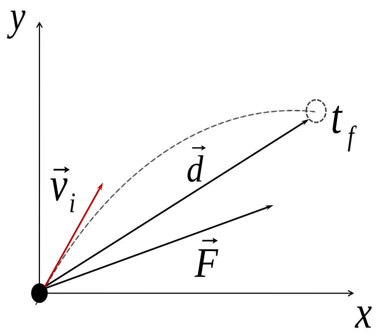


Figura 3.1: Una masa puntual m que se encuentra en el origen en $t = 0$ con velocidad inicial $\vec{v}_i$, es sometida a una fuerza constante $\vec{F}$. En $t = t_f$ llega a la posición $\vec{d}$.

Como la fuerza es constante, la aceleración del objeto también lo es, y como aprendimos en 1.20,sabemos que la velocidad en el eje x en un determinado tiempo t_f estará dada por:

$$v_{xf} \;=\; v_{xi} + \frac{F_x}{m}t_f \;\rightarrow\; t_f = \frac{m(v_{xf} - v_{xi})}{F_x}, \tag{3.1}$$

y expresiones análogas para la componente y. Aquí F_x es la componente de la fuerza en la dirección $\hat{x}$ y t_f es el tiempo que demora la partícula en desplazarse hasta la posición $\vec{d}$ dada por,

$$d_x = v_{xi}t_f + \frac{1}{2}\frac{F_x}{m}t_f^2 \tag{3.2}$$

y una expresión análoga para la componente y. Reemplazando ahora (3.1) en (3.2) encontramos el siguiente resultado,

$$F_x d_x = \frac{1}{2}mv_{xf}^2 - \frac{1}{2}mv_{xi}^2. \tag{3.3}$$

Como sabemos que existe una ecuación similar para $F_y d_y$, podemos escribir la siguiente expresión general:

$$\boxed{\vec{F}\cdot\vec{d} = \frac{1}{2}m\vec{v}_f^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_i^2.} \tag{3.4}$$

Es decir, *la componente de la fuerza en dirección del desplazamiento multiplicada por la longitud de este último es igual a el cambio en la cantidad "$m\vec{v}^2/2$" asociada a la partícula*. Es importante enfatizar que la fuerza $\vec{F}$ que aparece en esta ecuación es la *fuerza neta* que actúa sobre m.

A la cantidad $K = mv^2/2$ la llamaremos la **energía cinética** de la partícula, mientras que a $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ le denominaremos el **trabajo** realizado por $\vec{F}$ a lo largo de $\vec{d}$. De esta forma, podemos resumir lo anterior con esta nueva notación en el ***teorema de trabajo y energía cinética***,

$$\boxed{W = K_f - K_i = \Delta K} \tag{3.5}$$

Esto es, *el **trabajo** realizado por una fuerza sobre m es igual al cambio en la **energía cinética** de la partícula.*

Ejemplo 3.1

Considere un cuerpo de masa m que se desliza por el plano inclinado sin roce mostrado en la Fig. (3.2).

(a) Calcule la variación de la energía cinética del cuerpo al desplazarse desde el punto 1 al punto 2.

(b) Encuentre el trabajo realizado por la fuerza de gravedad durante el trayecto. Note que esta es la única fuerza que hace trabajo.

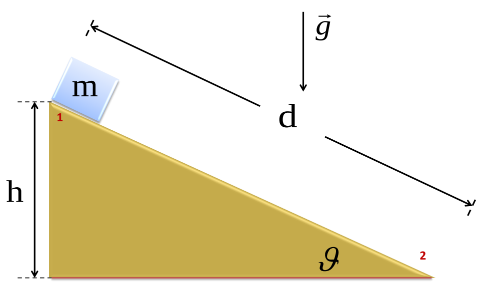


Figura 3.2: Una masa m se desliza a lo largo de un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal.

Solución

(a) Como la aceleración es constante, utilizamos la ecuación 1.23 que nos dice que si la masa m tiene una velocidad v_1 en el punto 1, la velocidad en el punto 2 estará dada por:

$$v_2^2 = 2ad + v_1^2, \tag{3.6}$$

donde la componente de la aceleración de gravedad que va en la dirección del movimiento es $a = g \sin\theta$. Remplazando el valor de la aceleración, y considerando que $d \sin\theta = h$ obtenemos que:

$$v_2^2 = 2gh + v_1^2. \tag{3.7}$$

Así, multiplicando por $m/2$ a ambos lados de la ecuación, obtenemos la variación de la energía cinética,

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh. \tag{3.8}$$

Note que esta variación de la energía cinética no depende del ángulo θ, sino que sólo de la altura h.

(b) Como mencionamos anteriormente, en este caso la única fuerza que realiza trabajo sobre la masa m es la gravedad, ya que la fuerza normal es siempre perpendicular al plano, y por lo tanto no realiza trabajo debido a que no está en la dirección del movimiento. Esto se puede apreciar claramente en la Fig. 3.3, donde es posible notar que sólo la componente paralela al plano, y por ende al desplazamiento, realiza trabajo.

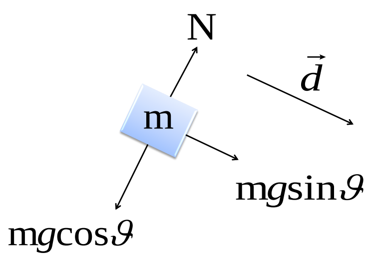


Figura 3.3: La normal es siempre perpendicular al desplazamiento.

Luego el trabajo realizado sobre la masa m desde el punto 1 al punto 2 es,

$$W_g = mgd\sin\theta. \tag{3.9}$$

Pero $d\sin\theta = h$, por lo que podemos escribir:

$$W_g = mgh. \tag{3.10}$$

Este trabajo es igual a la variación de energía cinética calculada anteriormente. Este es un ejemplo de la validez del teorema del trabajo y energía.

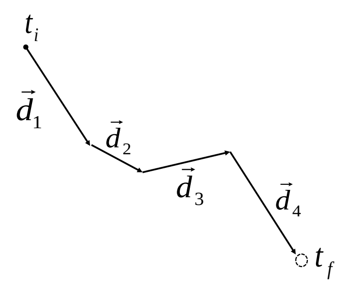


Figura 3.4: Una masa puntual es sometida a una serie de desplazamientos $\vec{d}_i$. A lo largo de cada uno de ellos la partícula está bajo la acción de una fuerza neta $\vec{F}_i$.

El resultado (3.4) se puede generalizar fácilmente al caso en que la partícula es sometida una serie de desplazamientos consecutivos $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$, ... , como se muestra en la Fig. (3.4). Suponiendo que a lo largo de cada uno de estos desplazamientos la masa

m está bajo la acción de una respectiva fuerza resultante constante $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., y usando la ecuación (3.4) tenemos una forma más general para el ***teorema de trabajo y energía cinética***,

$$\sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{d}_j = \frac{1}{2} m\vec{v}_f^2 - \frac{1}{2} m\vec{v}_i^2. \tag{3.11}$$

Observe que a pesar de que permitimos una serie de desplazamientos, el lado derecho de la ecuación sigue siendo ΔK calculado a partir de los puntos inicial y final.

¿ENTENDISTEST? 3.1

Considere un vagón de tren que se desplaza con velocidad constante $\vec{V}$ por una vía completamente horizontal, el cuál traslada una caja de masa M, como se muestra en la Fig. 3.5. ¿En esta situación, cuánto trabajo realiza el vagón sobre la caja en un intervalo de tiempo Δt?

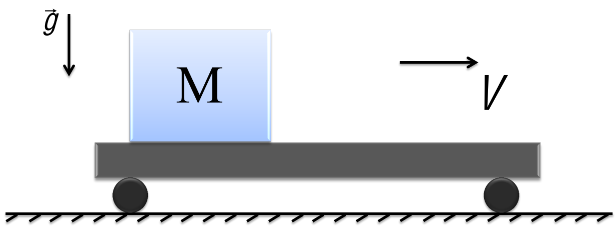


Figura 3.5: Esquema de una vista lateral de un vagón de tren que se mueve con velocidad constante $\vec{v}$, el cual traslada una caja de masa M .

Ejemplo 3.2

Considere un cuerpo de masa m que desliza sin roce por la sucesión de cuñas mostrada en la Fig. (3.6). Demuestre que la variación de la energía cinética del cuerpo al desplazarse desde el punto 0 al 4 es igual al trabajo realizado por la fuerza de gravedad.

Solución

En el ejemplo anterior aprendimos que la variación de la energía cinética del cuerpo al desplazarse desde el punto más alto al más bajo de una cuña sin roce es igual al trabajo realizado por la gravedad, el cual a su vez es independiente de la pendiente de la cuña (no depende de θ). Esto es,

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = mgh. \tag{3.12}$$

Lo anterior es válido para cada cuña por separado y podemos calcular el trabajo realizado por la gravedad como la suma de los trabajos realizados en cada una de ellas

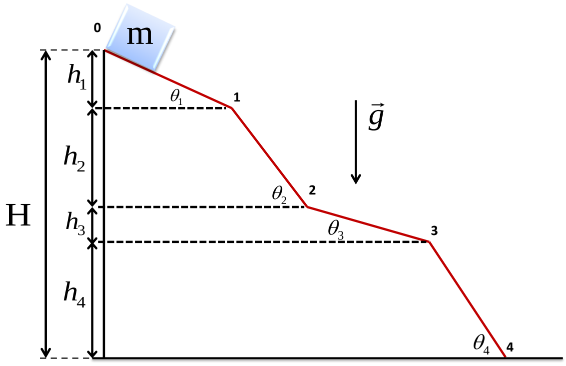


Figura 3.6: Un cuerpo se desliza por una sucesión de cuñas con distintos grados de inclinación.

como,

$$\begin{aligned} W_g &= W_1 + W_2 + W_3 + W_4 \\ &= mgh_1 + mgh_2 + mgh_3 + mgh_4 = mgH. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Luego, considerando la ecuación (3.8) tenemos que,

$$\begin{aligned} W_g &= \left(\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2\right) + \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{1}{2}mv_2^2\right) + \left(\frac{1}{2}mv_4^2 - \frac{1}{2}mv_3^2\right) \\ &= mgH. \end{aligned} \tag{3.14}$$

En la ecuación anterior podemos ver claramente que los términos intermedios se cancelan y obtenemos finalmente que:

$$\frac{1}{2}mv_4^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgH \quad \rightarrow \quad \Delta K = W_g. \tag{3.15}$$

Note que este resultado es absolutamente independiente del número de cuñas y de las diferentes inclinaciones. Dicho de otra forma, el resultado $\Delta K = mgH$ es independiente del camino utilizado por el bloque. Esto no tiene por qué ser cierto en general.

Energía Potencial: fuerzas conservativas 3.2

Consideremos la situación en la cual un cuerpo de masa m se desplaza a lo largo de una trayectoria que se inicia en la posición $\vec{r}_i$ y termina en $\vec{r}_f$, bajo la acción de una fuerza que depende de la posición ($\vec{F}(\vec{r})$). Existe cierto tipo de fuerzas para las cuales el trabajo $W_{i\rightarrow f}$ realizado **no** depende de la trayectoría seguida, sino que depende únicamente de las posiciones $\vec{r}_i$ y $\vec{r}_f$ (ver Fig.(3.7)). Este tipo de fuerza se denomina

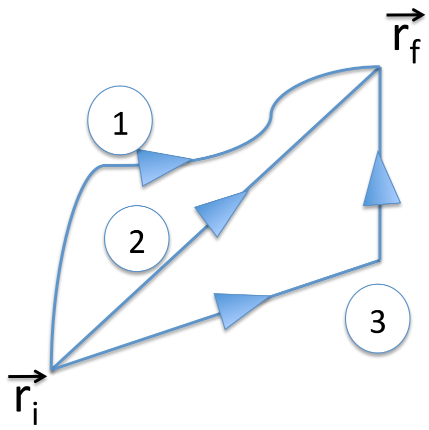


Figura 3.7: Para una fuerza conservativa el trabajo hecho sobre una partícula depende sólo de las posiciones inicial y final, pero no de la trayectoria.

fuerza conservativa debido a que, como veremos, no modifican la energía mecánica total del cuerpo, cantidad que definiremos a continuación.

Cuando tenemos una fuerza conservativa siempre se puede encontrar una función $U(\vec{r})$ que depende sólo de la posición y que cumple con,

$$W_{i\to f} = U(\vec{r}_i) - U(\vec{r}_f). \tag{3.16}$$

Entonces, el trabajo realizado por la fuerza al ir desde $\vec{r}_i$ a $\vec{r}_f$ está dado por la diferencia de la función $U(\vec{r})$ evaluada en los extremos de la trayectoria. A esta función $U(\vec{r})$ se le llama ***energía potencial***. Dado que lo único que nos interesa es la diferencia de esta función entre dos puntos, es obvio que sumar una constante a U es irrelevante.

Una vez obtenida la correspondiente energía potencial y usando el teorema de trabajo y energía cinética, es fácil ver que,

$$K_i + U(\vec{r}_i) = K_f + U(\vec{r}_f). \tag{3.17}$$

Es decir, para fuerzas conservativas la cantidad $E = K + U$ llamada ***energía mecánica total***, se conserva. Si la fuerza (conservativa) que actúa sobre el cuerpo lo acelera, entonces éste incrementará su energía cinética y a la vez disminuirá su energía potencial de manera de mantener la suma de ambas energías constante. Por ejemplo, esto ocurre en una montaña rusa. Cuando bajamos incrementamos nuestra velocidad y por tanto nuestra energía cinética, mientras que nuestra energía potencial debida a la fuerza gravitacional se reduce. Exactamente lo opuesto ocurre cuando nos encontramos en una subida de la montaña rusa. Existe entonces una constante transformación entre energía cinética y energía potencial, siendo la suma de ambas una constante.

Esta conservación de la energía mecánica es de gran utilidad para resolver una amplia variedad de problemas. En este capítulo examinaremos en detalle dos casos particulares: el *potencial gravitacional* y el *potencial de un resorte*.

Potencial gravitacional 3.2.1

Al desarrollar el primer ejemplo de este capítulo nos dimos cuenta de que el trabajo hecho por la fuerza de gravedad sobre un objeto que se desliza a lo largo de un plano inclinado no dependía del ángulo de inclinación, sino que quedaba determinado únicamente por la altura que descendía. En el segundo ejemplo vimos que la trayectoria del descenso se podía complicar mucho más, sin embargo el resultado era el mismo: El trabajo realizado por la fuerza de gravedad dependía exclusivamente de la diferencia de altura entre los puntos inicial y final.

Tomando todo esto en consideración, no es difícil darnos cuenta que la fuerza gravitacional es conservativa y que su correspondiente energía potencial vendrá dada por,

$$U(z) = mgz, \tag{3.18}$$

donde el eje Z apunta en la dirección vertical alejándose del centro de la Tierra.

Potencial del resorte 3.2.2

En la sección 1 aprendimos que la fuerza que ejerce un resorte sobre una masa unida a él es proporcional al desplazamiento (x) desde su posición de equilibrio, es decir, $\vec{F} = -kx\hat{x}$. Como en este caso la fuerza no es constante sino que varía con la posición, podemos recurrir a la ecuación (3.11) que nos dice que el trabajo total realizado por la fuerza puede ser descompuesto en la suma de muchos desplazamientos muy pequeños. En el caso del resorte podemos obtener una buena aproximación para el trabajo realizado por la fuerza de éste al estirarlo desde una posición inicial x_i a una final x_f sumando el trabajo hecho en pequeños intervalos Δx. Suponiendo que la fuerza es constante en ese intervalo,

$$W_{i\to f} = -\sum_{j=0}^{N-1} k(x_i + j\Delta x)\Delta x. \tag{3.19}$$

Observando la figura (3.8) y tomando el número de intervalos N muy grande, el resultado se volverá exacto y vemos que éste corresponde precisamente al área bajo la curva. Esta área es fácil de calcular:

$$W_{i\to f} = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2. \tag{3.20}$$

De esta forma es fácil darse cuenta de que la energía potencial del resorte es,

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \tag{3.21}$$

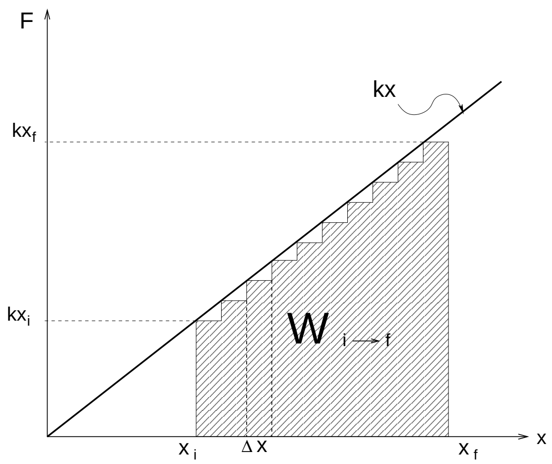


Figura 3.8: Para obtener el trabajo total realizado por el resorte debemos subdividir el desplazamiento en pequeños intervalos de largo Δx. En este caso el número de intervalos utilizado es $N = 10$.

¿ENTENDISTEST? 3.2

Considere un anillo de masa M que puede deslizar sin roce por una guía de alambre semicircular de radio R. El anillo a su vez está unido a un resorte de masa despreciable y constante elástica k, que está pivoteado en su extremo como se muestra en la Fig. 3.9. Si en cierto instante el anillo se suelta desde el reposo en el punto A, ¿Cuál es el valor de su energía cinética cuando pasa por el punto B?

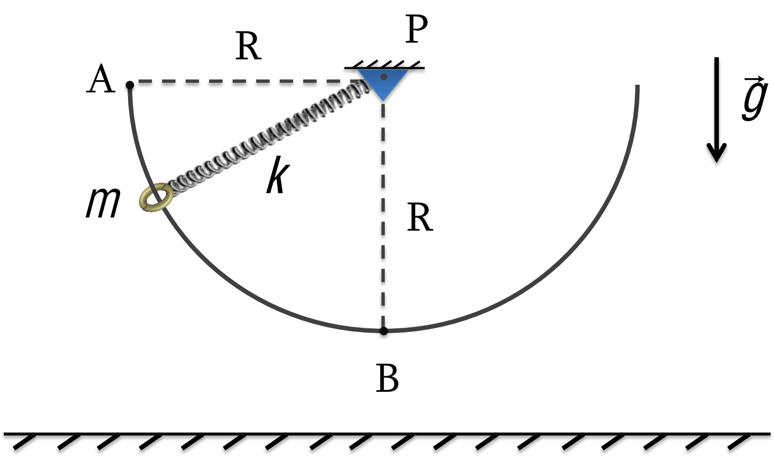


Figura 3.9: Esquema de una vista lateral de masa M.

Trabajo de la fuerza de roce 3.3

Uno de los ejemplos más importantes de una fuerza *no conservativa* es el de la fuerza de roce. Como aprendimos en el capítulo anterior, cuando un cuerpo se desliza sobre una superficie, existirá una fuerza de roce que se opondrá al desplazamiento relativo de las superficies en contacto.

A modo de ejemplo, consideremos un objeto de masa m que se desliza sobre una superficie horizontal con roce. Sobre el cuerpo actuará una fuerza que apunta en la dirección opuesta a la de su velocidad (relativa a la superficie). Sabemos además que si el coeficiente de roce cinético entre las superficies es μ_c, la magnitud de esta fuerza estará dada por $F_r = \mu_c N$, donde N es la fuerza normal entre las superficies de contacto. En este caso, el trabajo realizado por la fuerza de roce para ir desde un punto A a un punto B es exactamente el negativo de la distancia total recorrida (s_{AB}) multiplicada por el módulo de la fuerza ($\mu_c N$):

$$W_{A\to B} = -F_r s_{AB} = -\mu_c N s_{AB}. \tag{3.22}$$

El signo menos viene del hecho de que la fuerza apunta en la dirección contraria al desplazamiento. Notemos además que la longitud (s_{AB}) del camino recorrido *si depende de la trayectoria* que escogimos para ir de A a B y por lo tanto la fuerza **no** es conservativa. Esto significa que la energía mecánica del objeto no es constante, sino que disminuye por la acción del roce. La energía mecánica que se pierde por efecto de la fuerza de roce se transforma en energía calórica, algo que experimentamos frecuentemente al frotar nuestras manos.

Ejemplo 3.3

Consideremos que en el problema del plano inclinado planteado en el primer ejemplo de este capítulo, la superficie por la cual se desliza la masa m es ahora rugosa y con un coeficiente de roce cinético μ_c.

(a) Calcule la variación de la energía cinética del cuerpo al desplazarse desde el punto 1 al 2.

(b) Encuentre el trabajo realizado por la fuerza de gravedad.

(c) Determine el trabajo realizado por la fuerza de roce.

(d) Obtenga el trabajo neto realizado sobre la masa durante el trayecto de 1 a 2.

Solución
(a) Al igual que en el ejemplo 1, la velocidad del cuerpo en el punto 2 está dada por,

$$v_2^2 = 2ad + v_1^2. \tag{3.23}$$

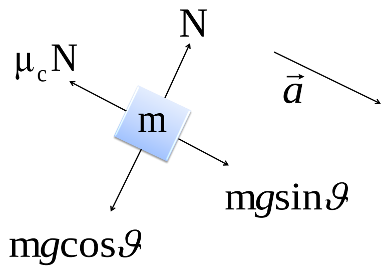


Figura 3.10

En este caso la aceleración puede ser obtenida usando el diagrama de cuerpo libre de la Fig. (3.10), y está dada por $a = g\sin\theta - \mu_c g\cos\theta$.

De esta manera, la variación de la energía cinética es,

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(2(g\sin\theta - \mu_c g\cos\theta)d) \\ &= mgd(\sin\theta - \mu_c\cos\theta). \end{aligned} \tag{3.24}$$

(b) Al igual que el ejemplo 1, aquí sólo la componente de la fuerza de gravedad que es paralela al desplazamiento realiza trabajo. Por lo tanto,

$$W_g = mgd\sin\theta. \tag{3.25}$$

(c) El trabajo realizado por la fuerza de roce claramente es negativo ya que la fuerza de roce está en la dirección contraria al vector desplazamiento. Por lo tanto, este trabajo es:

$$W_{roce} = -\mu_c mgd\cos\theta, \tag{3.26}$$

y se traduce en un aumento de la temperatura de las superficies de la masa y del plano inclinado.

(d) Finalmente, el trabajo neto realizado sobre la masa a lo largo del trayecto es,

$$W_{neto} = W_g + W_{roce} \quad \rightarrow \quad W_{neto} = mgd(\sin\theta - \mu_c\cos\theta). \tag{3.27}$$

Comparando con el resultado obtenido en (a), podemos apreciar claramente que obtenemos nuevamente el resultado que predice el teorema del trabajo y energía,

$$W_{neto} = \Delta K. \tag{3.28}$$

Note que en este caso al igual que en el ejemplo 3.1, el trabajo realizado por la fuerza de gravedad es *mgh*.

Potencia 3.4

En una infinidad de procesos físicos existe transferencia de energía. La potencia nos dice qué tan rápido es este proceso, es decir, la **potencia** es la cantidad de energía transferida por unidad de tiempo. En el S.I. la unidad de medida de la potencia es el "Watt" (1 W = 1 J/s).

En términos matemáticos, la potencia (media) está dada por,

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}, \tag{3.29}$$

donde ΔE es la energía total transferida en el proceso y Δt es el tiempo que demoró este intercambio de energía. Por ejemplo, si un corredor que pesa 80 kg parte desde una velocidad nula y llega a una velocidad de 30 km/h en 4 segundos, ¿cuál es la potencia promedio que fue capaz de generar? La respuesta es simple si nos damos cuenta que toda la potencia fue utilizada en aumentar la energía cinética, esto es,

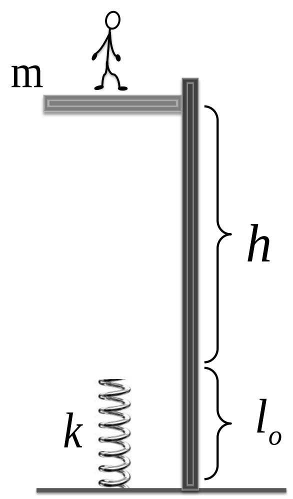
$$P = \frac{K_f - K_i}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}mv_f^2 - 0}{\Delta t} \tag{3.30}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(80 \text{ kg})(30 \text{ km/h})^2 - 0}{3 \text{ s}} = 925,9 \text{ W}. \tag{3.31}$$

Problemas resueltos 3.5

Problema 3.1

Un nuevo juego de un parque de diversiones, llamado Death Fall, consiste en una plataforma que se eleva a una altura h por sobre el nivel dado para luego caer libremente hasta que se topa con un resorte de largo natural l_0 y constante elástica k. Determine la velocidad de la plataforma al ponerse en contacto con el resorte y la fuerza que ejerce el resorte cuando presenta su máxima compresión.



Solución
Como sólo intervienen fuerzas conservativas, la energía mecánica total será constante en el tiempo. Si fijamos la energía potencial gravitacional como nula al nivel de piso,

$$E_A = mg(h + l_0),$$

donde A es el punto inicial de la plataforma. Ahora, si llamamos B el punto en el cual la plataforma entra en contacto con el resorte, se tiene que

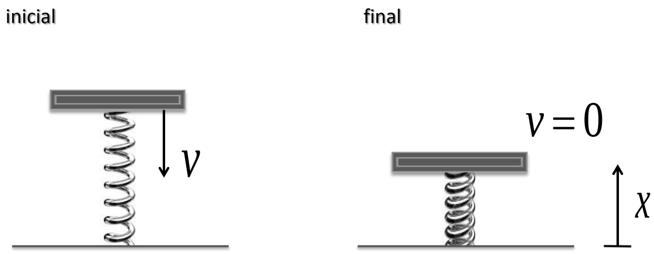
$$E_B = mg(l_0) + \frac{1}{2}mv^2.$$

Por conservación de la energía,

$$E_A = E_B \rightarrow mg(l_0) + \frac{1}{2}mv^2 = mg(h + l_0)$$

$$\rightarrow v = \sqrt{2gh}.$$

Ahora, si llamamos x a la distancia entre la plataforma y el suelo cuando ocurre la máxima compresión del resorte, y notando que en ese momento el cuerpo no tendrá energía cinética, se obtiene que la energía en ese momento es,



$$E_x = mgx + \frac{1}{2}k(l_0 - x)^2 = mg(l_0 + h),$$

donde hemos usado la conservación de energía mecánica en la última igualdad. Tenemos entonces una ecuación cuadrática en la variable x,

$$mgx + \frac{1}{2}kx^2 - kxl_0 + \frac{1}{2}kl_o^2 = mg(l_0 + h),$$

que admite dos soluciones,

$$x_{\pm} = \frac{(kl_0 - mg) \pm \sqrt{m^2g^2 + 2kgmh}}{k}.$$

¿Cuál de las dos es la solución correcta? Supondremos que $kl_0 > mg$, de manera que para algún grado de compresión el resorte tendrá la suficiente fuerza como para vencer a la gravedad y provocar una aceleración hacia arriba de la plataforma. Nos damos cuenta que en este caso la única solución positiva corresponde a x_+. Finalmente, la fuerza que ejerce el resorte en este caso será

$$\vec{F} = k(l_0 - x_+)\hat{z}.$$

Problema 3.2

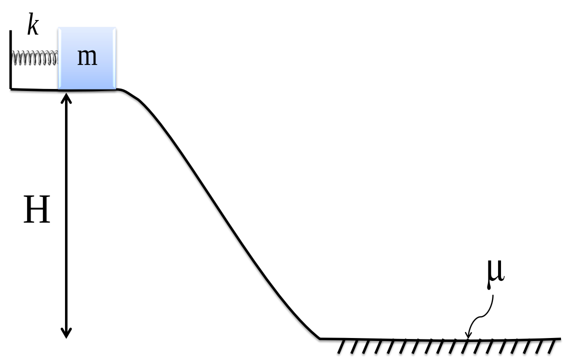
Un carro de masa M está en la pista de la figura. La pista es horizontal en ambos extremos pero la parte izquierda está H metros por sobre la parte derecha. El carro no está amarrado al resorte de constante k y viaja sin roce hasta que alcanza la zona de frenado en la parte inferior con coeficiente de roce dinámico μ. Inicialmente el carro está en contacto con el resorte.

(a) Primero el carro es empujado hacia la izquierda comprimiendo el resorte en D metros. ¿Cuánto trabajo se hace sobre el resorte en éste proceso?

(b) El carro es soltado, ¿cuál es la magnitud de su velocidad v_0 cuando abandona el resorte?

(c) ¿Cuál es su rapidez v_f justo antes que entre a la zona de frenado?

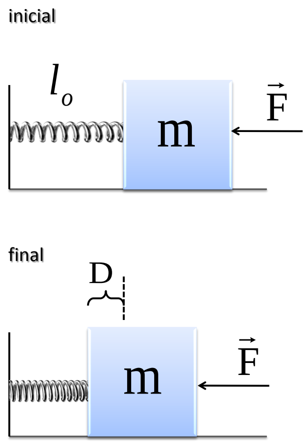
(d) ¿Cuántos metros recorre en la zona de frenado, antes de detenerse?



Solución

(a) Inicialmente, el carro se encuentra en reposo y el resorte se encuentra en su largo natural. Si definimos la energía potencial gravitacional como $U = mgh$ donde h es la altura medida desde la parte más baja, entonces la energía mecánica inicial del carro es

$$E_i = 0 + mgH.$$



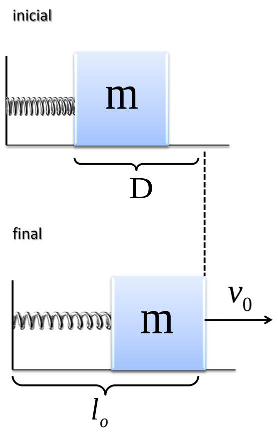
Mientras que la energía final es,

$$E_f = \frac{1}{2}kD^2 + mgH.$$

Se deduce entonces que el trabajo realizado es igual al cambio en la energía mecánica total,

$$W = \frac{1}{2}kD^2.$$

(b) Ahora considerando como instante inicial el momento en que se suelta la masa m, y final cuando ésta deja el resorte,



$$E_i = mgH + \frac{1}{2}kD^2$$

$$E_f = mgH + \frac{1}{2}mv_o^2.$$

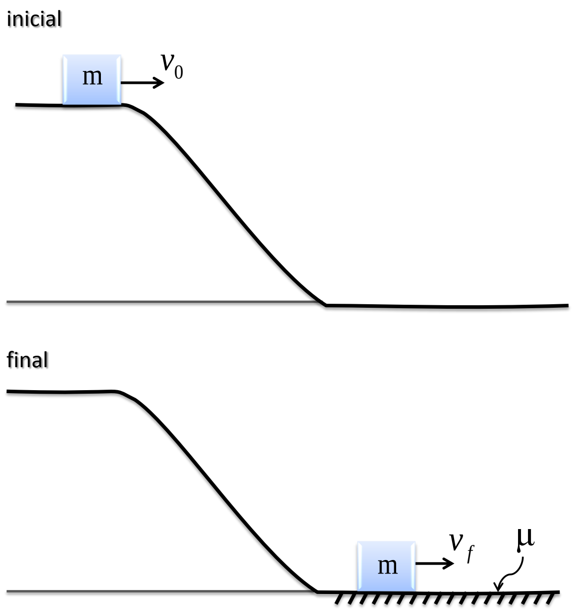
Entonces, por conservación de la energía mecánica:

$$\frac{1}{2}kD^2 = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

y obtenemos,

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}D.$$

(c) Definimos ahora los instantes inicial y final como se muestra en la figura siguiente. En el momento en que el carro abandona el resorte, posee una energía



$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgH,$$

y cuando llega a la parte más baja,

$$E_f = \frac{1}{2}v_f^2.$$

Por conservación de la energía,

$$\frac{1}{2}mv_o^2 + mgH = \frac{1}{2}mv_f^2,$$

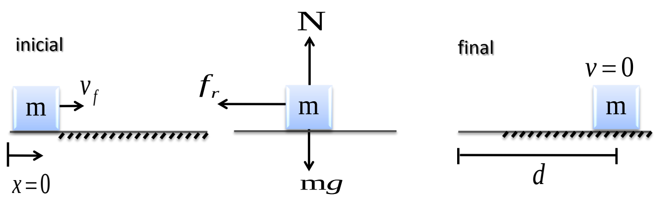
$$\rightarrow v_f^2 = v_o^2 + 2gH$$

$$\rightarrow v_f = \sqrt{\frac{k}{m}D^2 + 2gH},$$

donde hemos usado el resultado de la parte (b).

(d) En el momento en que el carro entra en la zona de frenado, la energía mecánica total es,

$$E_i = \frac{1}{2}mv_f^2.$$



Mientras que en el momento en que se detiene,

$$E_f = 0.$$

El proceso de frenado se ilustra en la figura. Por otra parte, el trabajo de la fuerza de roce es simplemente,

$$W = -\mu mgd$$

donde d es la distancia que recorre hasta frenarse. De esta forma,

$$W = E_f - E_i,$$

$$\rightarrow mg\mu d - \frac{1}{2}mv_f^2 = 0,$$

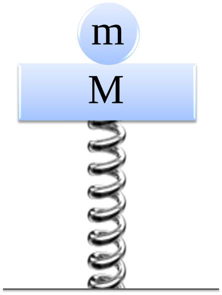
$$\rightarrow d = \frac{1}{2g\mu}v_f^2.$$

Entonces,

$$d = \frac{1}{2g\mu}\left(\frac{k}{m}D^2 + 2gH\right).$$

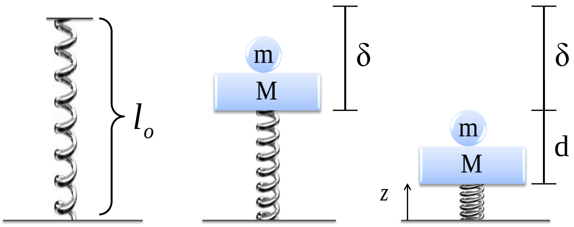
Problema 3.3

Considere un resorte vertical apoyado en el suelo de constante k y largo natural l_0. Sobre el resorte se fija una bandeja de masa M que lo comprime. Luego, encima de la bandeja se coloca una partícula de masa m. Suponga que usted comprime el resorte una distancia d respecto de la posición de equilibrio del sistema resorte-bandeja-partícula. Encuentre la altura máxima (medida desde el suelo) que alcanza la partícula m una vez que se libera de la bandeja.



Solución
Definamos δ como la compresión producida por el peso de $M + m$. Por equilibrio de fuerzas, se tiene

$$k\delta = (M + m)g.$$



Por otra parte, no es difícil obtener las ecuaciones de Newton para ambas masas:

$$m\ddot{z} = N - mg$$

$$M\ddot{z} = -k(z - l_o) - N - Mg$$

donde N es la normal entre M y m. Sumando ambas, se obtiene

$$(M + m)\ddot{z} + k(z - l_0) = -(m + M)g$$

Si se comprime ahora el resorte una distanciá adicional d y se suelta, el sistema acelerará hacia arriba. Para que m se despegue de M la fuerza de contacto entre ambas debe desaparecer, es decir, cuando $N = 0$:

$$m\ddot{z} = -mg \rightarrow \ddot{z} = -g$$

Reemplazando en la ecuación de movimiento

$$-(m + M)g + k(z - l_0) = -(m + M)g$$

Luego, el despegue ocurre cuando $z = l_0$. Para determinar la velocidad con la que despega podemos usar conservación de la energía en el sistema masas-resorte

$$E_i = U_g + U_k = -(M+m)g(d+\delta) + \frac{1}{2}k(d+\delta)^2$$

Donde hemos definido que la energía potencial es cero en $z = l_0$. Como $k\delta = (M+m)g$,

$$E_i = -k\delta(d+\delta) + \frac{1}{2}k(d+\delta)^2$$

$$\rightarrow E_i = \frac{1}{2}k(d^2 - \delta^2)$$

En tanto, la energía del sistema en $z = l_0$ está dada por

$$E_f = \frac{1}{2}(M+m)v^2.$$

Por conservación de energía

$$\frac{1}{2}k(d^2 - \delta^2) = \frac{1}{2}(M+m)v^2$$

$$\rightarrow v^2 = \frac{k(d^2 - \delta^2)}{M+m}$$

Una vez que m se despega de M, puede ser tratado por separado. Entonces, al despegar

$$E_i = \frac{1}{2}mv^2$$

y

$$E_f = mgh_{max}$$

Otra vez, por conservación de energía

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh_{max}.$$

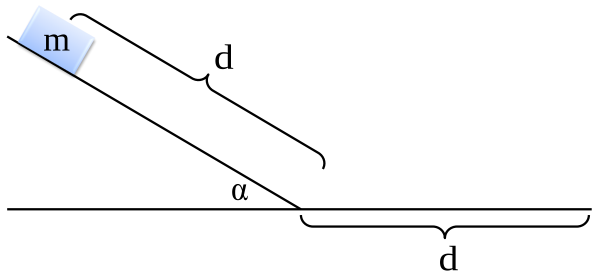
Luego, la altura máxima que alcanza m sobre $z = l_0$ es

$$h_{max} = \frac{v^2}{2g}$$

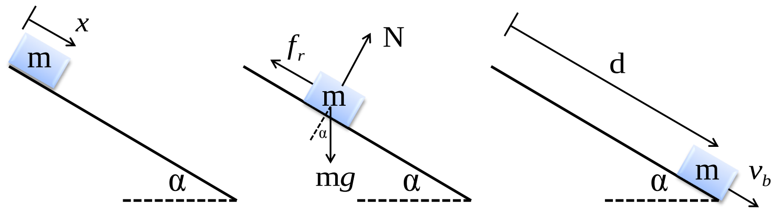
$$\rightarrow h_{max} = \frac{1}{2g}\frac{k(d^2 - \delta^2)}{(M+m)}$$

Problema 3.4

Un cuerpo comienza a deslizar sobre un plano inclinado un ángulo α, y después continúa sobre una superficie horizontal. El coeficiente de roce cinético entre el cuerpo y la superficie es μ. Si la distancia recorrida por el cuerpo sobre el plano inclinado es igual a la distancia que recorre sobre el plano horizontal, calcule el coeficiente de roce.



Solución
Notemos que mientras el cuerpo desliza por el plano inclinado, las fuerzas actuando sobre la masa son el peso, la fuerza de roce y la normal.



Notemos que la normal se cancela con la componente $mg\cos\alpha$ del peso y la fuerza neta es en la dirección $\hat{x}$:

$$\vec{F} = (mg\sin\alpha - \mu N)\hat{x}$$

Además, como $N = mg\cos\alpha$,

$$\vec{F} = (mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha)\hat{x}$$

El trabajo realizado por esta fuerza es igual al cambio en la energía cinética de la masa:

$$W_{AB} = mgd\sin\alpha - \mu mgd\cos\alpha d = \frac{1}{2}mv_B^2$$

ya que inicialmente no posee energía cinética.

Ahora, el trabajo realizado por la fuerza de roce en el tramo horizontal es

$$W_{roce} = -d\mu mg.$$

Como durante este tramo la fuerza neta es la fuerza de roce, éste trabajo es igual a la variación en la energía mecánica. Sin embargo, como la altura no varía, el cambio en la energía potencial es cero. Luego, la variación sólo se debe a la energía cinética:

$$W_{roce} = -d\mu mg = \frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{1}{2}mv_B^2$$

Pero como la velocidad en C es cero,

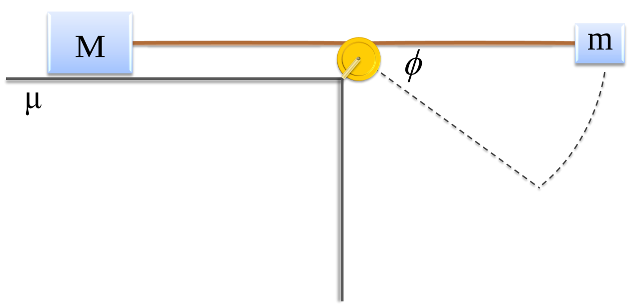
$$d\mu mg = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$d\mu mg = d(mgsin\alpha - \mu mgcos\alpha)$$

$$\rightarrow \mu = \frac{sin\alpha}{1 + cos\alpha}.$$

Problema 3.5

Un bloque de masa M descansa sobre una superficie horizontal. Entre la superficie y el bloque el coeficiente de roce estático es μ_e. Otro bloque de masa m se encuentra atado a él, mediante una cuerda de largo L. En cierto instante se libera m, la cual cae por efecto de la gravedad. Si $M = 2m$, calcule el ángulo ϕ en que el bloque M comienza a deslizar.



Solución
La masa M se encuentra en reposo, por lo que:

$$\sum F_x = T - f_r = 0$$

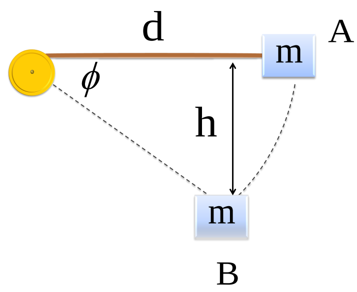
$$\sum F_y = N - Mg = 0,$$

donde T es la tensión de la cuerda, f_r la fuerza de roce y N la normal. En el momento en que el bloque M está a punto de deslizar, la fuerza de roce estática debe ser máxima, esto es,

$$f_r = \mu_e N = \mu_e Mg.$$

Luego

$$T = \mu_e Mg.$$



Ahora, digamos que la energía potencial gravitatoria en el punto más alto de m es nula, de manera que:

$$E_A = 0$$

A lo largo del trayecto $A - B$, actúa sobre m la fuerza de gravedad, que es conservativa, y la tensión que es perpendicular a la trayectoria por lo que no realiza trabajo. Concluimos entonces que la energía mecánica total de m se conserva,

$$E_B = E_A \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - mgd\sin\phi = 0$$

donde v es la magnitud de la velocidad en el punto B. Entonces,

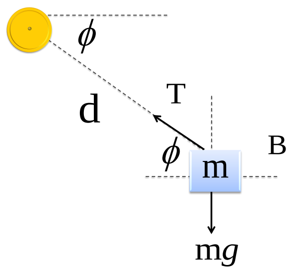
$$v^2 = 2gdsin\phi$$

Observemos ahora el diagrama de fuerzas para la masa m en el punto B:

Notemos que la masa desde A a B se mueve en trayectoria circular de radio d, de manera que presenta una aceleración centrípeta. El equilibrio de fuerzas en la dirección radial es:

$$T - mgsin\phi = m\frac{v^2}{d}$$

$$\mu_e Mg - mg\sin\phi = 2mg\sin\phi$$



$$\mu_e Mg = 3mg\sin\phi$$

$$\sin\phi = \frac{\mu_e Mg}{3m}$$

Dado que $M = 2m$

$$\sin\phi = \frac{2\mu_e}{3}$$

$$\phi = \sin^{-1}\left(\frac{2\mu_e}{3}\right).$$

Problema 3.6

Un cuerpo de masa M inicialmente en reposo parte deslizando sin roce desde el punto más alto de una esfera de radio R.
a) Determinar el punto en que abandona la superficie esférica.
b) Calcular la energía cinética con que llegará al piso.

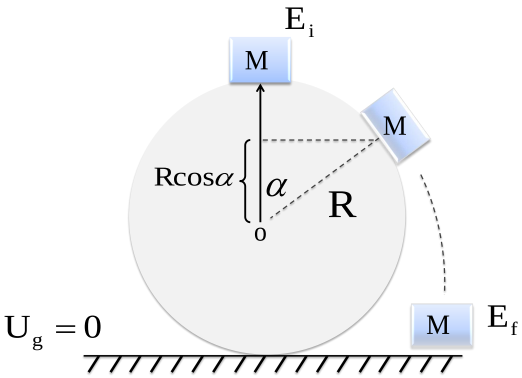
Solución
Sea α el ángulo que se forma con respecto a la vertical en el momento que la masa M abandona la superficie, como se aprecia en la figura. Para un ángulo polar ϑ arbitrario $(0 < \vartheta < \alpha)$, el equilibrio de fuerzas está dado por

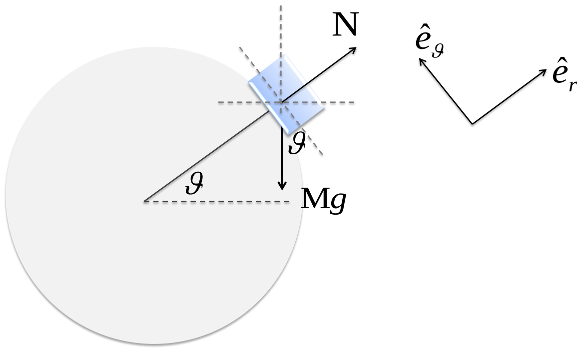
$$N - Mg\sin\vartheta = -M\dot{\vartheta}^2 R,$$

donde $\dot{\vartheta}$ es la velocidad angular. Ahora, en el momento en que la masa abandona la superficie la normal de contacto entre la esfera y la masa M se anula, es decir,

$$-Mg\sin(\pi/2 - \alpha) = -M\dot{\alpha}^2 R$$

$$Mg\cos(\alpha) = M\dot{\alpha}^2 R,$$





donde usamos que $\vartheta = \pi/2 - \alpha$. Entonces,

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{g\cos\alpha}{R}.$$

Para determinar $\dot{\alpha}$, podemos usar el teorema de conservación de la energía entre el instante en que comienza a deslizar y cuando la masa deja de estar en contacto con la esfera. Tomando la parte inferior de la esfera como la referencia de energía potencial nula se tiene:

$$E_i = mg2R,$$

mientras que justo antes de deslizar,

$$E_f = mgR(1 + \cos\alpha) + \frac{1}{2}mv^2.$$

Ahora, la magnitud de la velocidad en ese instante es

$$v = -R\dot{\alpha}$$

Luego,

$$E_f = mgR(1 + \cos\alpha) + \frac{1}{2}mR^2\dot{\alpha}^2.$$

Como la energía mecánica de la masa se conserva en todo instante:

$$mg2R = mgR(1 + \cos\alpha) + \frac{1}{2}mR^2\dot{\alpha}^2$$

Reemplazando el resultado obtenido para $\dot{\alpha}$ justo en el momento del despegue,

$$mg2R = mgR(1 + \cos\alpha) + \frac{1}{2}mR^2\frac{g\cos\alpha}{R}$$

$$R = R\cos\alpha + \frac{1}{2}R\cos\alpha$$

$$\frac{2}{3} = \cos\alpha \rightarrow \alpha = \cos^{-1}(2/3) = 0,841\text{rad}$$

b) Para obtener la velocidad con que llega al piso, utilizamos que la energía se conserva. La energía inicial está dada por

$$E_i = 2mgR,$$

mientras que la energía final (cuando llega al piso), es puramente cinética

$$E_f = \frac{1}{2}mv_f^2.$$

Ambas son iguales, por lo tanto

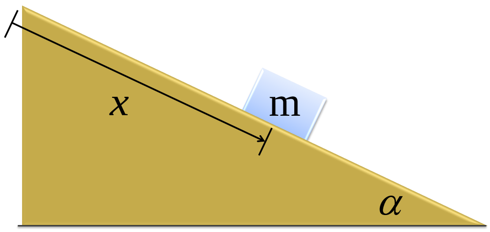
$$v_f = 2\sqrt{gR}$$

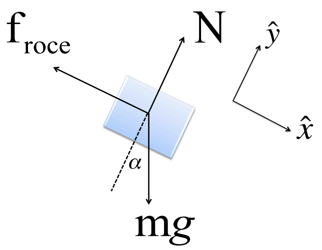
Problema 3.7

Un bloque cuya masa es m = 6 kg desliza hacia abajo por un plano inclinado rugoso, partiendo del reposo. El ángulo de inclinación del plano es α = 60°, y los coeficientes de roce estático y cinético son 0,2 y 0,18, respectivamente.
a) Describa todas las fuerzas que actúan sobre el bloque y determine el trabajo realizado por cada una de ellas, si el bloque desliza 2 m, a lo largo del plano
b) ¿Cuál es el trabajo neto realizado sobre el bloque?
c) ¿Cuál es la velocidad del bloque después de recorrer una distancia de 2 m ?

Solución
a) Vamos a llamar x a la coordenada del bloque en la dirección de movimiento sobre el plano inclinado. Es decir, diremos que la posición del bloque tiene la forma $\vec{r}(t) = x(t)\hat{x}$. Las fuerzas que actúan sobre el bloque se muestran en el diagrama de cuerpo libre.

Dado que el bloque desliza, la fuerza de roce es cinética y se tiene que





$$\vec{F}_{roce} = -\mu_c mg\cos\alpha\hat{x}.$$

Luego, el trabajo que realiza al desplazarse una distancia d es:

$$W_{roce} = -d\mu_c mg\cos\alpha$$

Para el trabajo del peso, se obtiene,

$$W_{peso} = \vec{F}\cdot\vec{d} = (mg\sin\alpha\hat{x} - mg\cos\alpha\hat{y})\cdot d\hat{x}$$

$$W_{peso} = dmg\sin\alpha$$

El factor $\sin\alpha$ se debe a que $mg\sin\alpha$ es la componente del peso en la dirección de movimiento. Notar que a diferencia del roce, el trabajo del peso es positivo. Finalmente, el trabajo de la normal es

$$W_{normal} = \vec{N}\cdot\vec{d} = mg\cos\alpha\hat{y}\cdot d\hat{x} = 0$$

pues la normal es perpendicular en todo instante a la dirección de movimiento. Evaluando numéricamente reemplazando los valores para d, α, m y g se obtiene:

$$W_{roce} = -10,5948 \quad \text{J}$$
$$W_{peso} = 101,949 \quad \text{J}.$$

b) El trabajo neto realizado sobre el bloque es entonces

$$W_{neto} = W_{peso} + W_{roce} = 91,3537 \quad \text{J}.$$

c) Usando directamente el teorema del trabajo y energía cinética,

$$W_{neto} = \frac{1}{2}mv_f^2,$$

donde v_f es la velocidad del bloque cuando ha recorrido 2 metros sobre el plano. Notar que la energía cinética inicial es nula pues el sistema parte del reposo. Despejando:

$$v_f^2 = \frac{2W_{neto}}{m}$$

Evaluando:

$$v_f = 5,51826 \quad \text{m/s}.$$

Otra forma de obtener el mismo resultado, es notando que si la altura inicial del bloque respecto al suelo es h, la energía inicial es $E_i = mgh$ y la energía después de recorrer una distancia d sobre el plano es:

$$E_f = mg(h - d\sin\alpha) + \frac{1}{2}mv_f^2$$

Ambas se relacionan a través de

$$E_f = E_i + W_{roce} = mgh - 10,5948 = mg(h - 2\sin\alpha) + \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$-10,5948 = -2mg\sin\alpha + \frac{1}{2}mv_f^2$$

Evidentemente, se obtiene el mismo resultado.

4

Moméntum y colisiones

Introducción 4.1

En los capítulos anteriores hemos visto que si sabemos cuál es la fuerza que actúa sobre un cuerpo en cualquier instante de tiempo podremos en principio determinar todos los detalles de su movimiento. Sin embargo, existen diversas situaciones en las cuales resulta muy difícil determinar la forma exacta de la fuerza, como por ejemplo, cuando chocan dos autos o cuando una raqueta de tenis golpea una pelota. Para el análisis de este tipo de problemas veremos que es muy útil definir una nueva cantidad denominada **moméntum** (o cantidad de movimiento) $\vec{p}$ que está asociada tanto a la masa del objeto como a su velocidad:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{4.1}$$

En el capítulo 2 enunciamos la segunda ley de Newton como: “En un sistema inercial, el cambio de la cantidad $m\vec{v}$ de un objeto es igual a la fuerza neta que actúa sobre él”. Este enunciado puede ser expresado en términos de la cantidad de movimiento como: “En un sistema inercial, la tasa de cambio del moméntum de un objeto es igual a la fuerza neta que actúa sobre él”, lo que matemáticamente se puede expresar como:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{4.2}$$

Es decir, la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre un cuerpo nos dice cuál es la tasa de variación de su moméntum $\vec{p}$. La ecuación 4.2 es la forma más general de escribir la segunda ley de Newton, ya que contempla los casos que hemos descrito en los capítulos anteriores en los que varía la velocidad de un objeto de masa *m*, y además describe los casos en que la masa del objeto cambia en el tiempo.

Impulso 4.2

Como mencionamos anteriormente, existen diversas situaciones en las cuales la fuerza que actúa sobre un objeto cambia en el tiempo en forma rápida y muy difícil de determinar, como por ejemplo, cuando se patea una pelota de fútbol o cuando chocan dos bolas de billar. En estos casos es difícil estudiar la dependencia temporal de esta fuerza, por lo tanto, calcular una aceleración en función del tiempo es muy complejo. Además, no tiene mucho sentido desde el punto de vista práctico realizar una descripción tan detallada si es que sólo nos interesa conocer el efecto final de esta fuerza en el movimiento del objeto. De hecho, podemos relacionar los estados de movimiento del objeto antes y después que la fuerza ha actuado sobre él mediante la introducción del concepto de **impulso**.

Se define impulso como el producto entre la fuerza promedio $\vec{F}_P$ que actúa sobre el cuerpo en el intervalo de tiempo en cuestión, multiplicada por el largo de este intervalo de tiempo, que denotamos como Δt (Fig. 4.1). Esto se expresa matemáticamente como[1]:

$$\vec{J} = \vec{F}_P \Delta t. \tag{4.3}$$

El impulso se relaciona con los estados de movimiento del cuerpo, antes y después de la acción de la fuerza, de la forma,

$$\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i, \tag{4.4}$$

donde $\vec{p}_f$ y $\vec{p}_f$ son el momentum final e inicial respectivamente. La relación 4.4 es consecuencia directa de la segunda ley de Newton[2].

Sistemas de partículas y conservación del moméntum 4.3

En muchos casos de interés se tiene un sistema compuesto por dos o más objetos que interactúan entre ellos (**fuerzas internas**), y sobre los cuales además pueden actuar **fuerzas externas**. Tal es el caso de colisiones entre dos (o más) cuerpos o cuando una explosión hace que un objeto se fragmente en muchos pedazos. En esta sección veremos que: **"La tasa de variación del moméntum total de un sistema de**

[1] Una definición completa de esta cantidad se logra mediante la utilización del concepto de integral: $\vec{J} = \int_{\Delta t} \vec{F} dt$

[2] Demostración: $\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \sum \vec{F} = m\dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$, integrando ambos lados de la ecuación se obtiene que, $\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \left(\sum \vec{F}\right) dt = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{d}{dt}(m\vec{v})\right) dt = (m\vec{v})_f - (m\vec{v})_i \rightarrow \vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$.

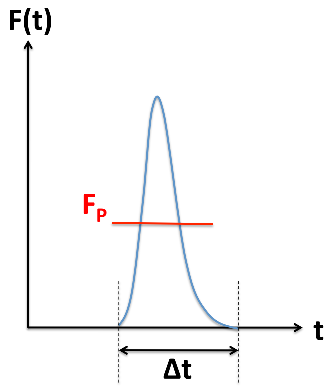


Figura 4.1: Representación gráfica de la variación del módulo de una fuerza que cambia rápidamente en función del tiempo. La cantidad F_P representa el valor de la fuerza promedio que actúa sobre el cuerpo en el intervalo de tiempo Δt.

partículas corresponde a la sumatoria de todas las fuerzas externas que actúan sobre él". Una consecuencia muy importante de esto último es que **en la ausencia de fuerzas externas el moméntum total de un sistema de partículas se mantiene constante (se conserva)**.

Para comenzar a entender esta importante afirmación recurriremos primero al caso particular de la colisión entre dos cuerpos, en la ausencia de fuerzas externas, que es una de sus aplicaciones más importantes. Consideremos entonces la colisión entre dos partículas de masa m_1 y m_2, representada en la figura 4.2 . Antes de la colisión las partículas tienen velocidades $\vec{v}_{1i}$ y $\vec{v}_{2i}$ y después de la colisión las velocidades son $\vec{v}_{1f}$ y $\vec{v}_{2f}$ respectivamente.

Aplicando la ecuación 4.4 a la partícula de masa m_1, nos queda:

$$\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i \rightarrow \bar{\vec{F}}_{21}\Delta t = m_1(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{1i}) \tag{4.5}$$

donde $\bar{\vec{F}}_{21}$ es la fuerza promedio que la partícula de masa m_2 ejerce sobre la partícula de masa m_1 en el intervalo de tiempo Δt que duró la colisión. Análogamente, también podemos aplicar la ecuación 4.4 a la partícula de masa m_2, que nos da:

$$\bar{\vec{F}}_{12}\Delta t = m_2(\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{2i}) \tag{4.6}$$

y ahora $\bar{\vec{F}}_{12}$ es la fuerza promedio que la partícula de masa m_1 ejerce sobre la partícula de masa m_2 durante la colisión. Luego, sumando las ecuaciones 4.5 y 4.6, se obtiene que:

$$\bar{\vec{F}}_{21}\Delta t + \bar{\vec{F}}_{12}\Delta t = m_1(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{1i}) + m_2(\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{2i}) \tag{4.7}$$

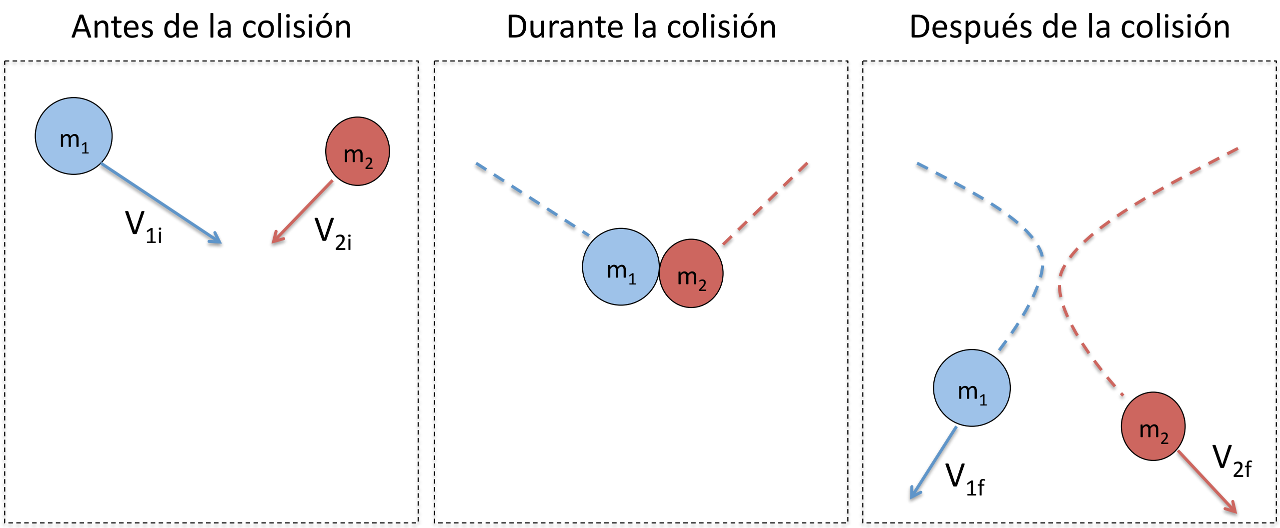


Figura 4.2: Representación de una colisión entre dos partículas de masa m_1 y m_2. Antes de la colisión las partículas tienen velocidades $\vec{v}_{1i}$ y $\vec{v}_{2i}$ y después de la colisión las velocidades son $\vec{v}_{1f}$ y $\vec{v}_{2f}$ respectivamente.

Agrupando términos obtenemos que:

$$(\bar{\vec{F}}_{21} + \bar{\vec{F}}_{12})\Delta t = (m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}) - (m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}) \tag{4.8}$$

Pero de la tercera ley de Newton (principio de acción y reacción) sabemos que $\bar{\vec{F}}_{12} = -\bar{\vec{F}}_{21}$, por lo tanto se obtiene que $\bar{\vec{F}}_{12} + \bar{\vec{F}}_{21} = 0$. Así, la ecuación 4.8 nos queda:

$$(m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}) = (m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}) \tag{4.9}$$

De este resultado podemos notar que el lado derecho de la igualdad es justamente el moméntum inicial total del sistema, esto es $\vec{P}_{Ti} = (m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i})$, y del mismo modo el lado izquierdo de 4.9 es el moméntum final total del sistema, $\vec{P}_{Tf} = (m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f})$. Por lo tanto, podemos decir que en una colisión se cumple que el moméntum del sistema completo se conserva, esto es:

$$\vec{P}_{Ti} = \vec{P}_{Tf} \tag{4.10}$$

Vemos que este resultado confirma nuestra afirmación inicial de que en la ausencia de fuerzas externas no existe variación en el moméntum total del sistema de partículas. Notamos además que en la derivación de este resultado fue clave el uso del principio de acción y reacción, el cual es responsable del hecho de que las fuerzas internas se cancelan de tal manera que no tienen efecto sobre el moméntum total. Más adelante demostraremos que estas mismas ideas básicas se pueden generalizar para sistemas de N partículas.

¿ENTENDISTEST? 4.1

Considere dos partículas de masa m que se mueven inicialmente a lo largo de una misma línea recta, ambas con rapidez v pero en direcciones opuestas. Si en cierto instante estas partículas chocan y quedan pegadas, ¿con qué velocidad se mueven después de la colisión?

Ejemplo 4.1

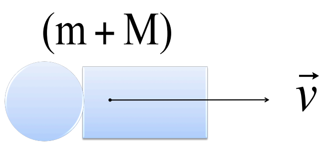
Consideremos dos partículas de masas m y M, restringidas a moverse (sin roce) a lo largo de un eje $\hat{x}$. Supongamos que la partícula m incide desde la izquierda con velocidad v_0 y se mueve hacia la partícula M, que inicialmente se encuentra en reposo. Suponga que las dos partículas colisionan, quedando una adosada a la otra, formando una única partícula de masa $M + m$. ¿Con qué velocidad se moverá esta nueva partícula después de la colisión? ¿Se conserva la energía cinética en esta colisión?

Solución

Podemos utilizar el principio de conservación del moméntum, ya que sobre el sistema $\{m, M\}$ no hay fuerzas externas actuando sobre él. Por lo tanto, antes de la colisión, se tiene que:

$$\vec{P}_i = mv_0\hat{i} + M0\hat{i} = mv_0\hat{i}$$

y después de la colisión tenemos que:



$$\vec{P}_f = (M + m)v\hat{i}$$

Dado que el moméntum total se conserva, se obtiene que:

$$mv_0\hat{i} = (M + m)v\hat{i}$$

Luego, la velocidad con que se mueven las partículas después de la colisión es:

$$\vec{v} = \frac{mv_0}{M + m}\hat{i}$$

Ahora veamos que ocurre con la energía. Sabemos que la energía cinética inicial es:

$$K_i = \frac{1}{2}mv_0^2$$

mientras que la final es,

$$K_f = \frac{1}{2}\frac{m^2v_0^2}{M+m} = K_i\frac{m}{M+m}$$

de esta última expresión, podemos notar que la energía cinética final es igual a la energía cinética inicial multiplicada por un factor que siempre es menor que 1. Por lo tanto podemos concluir que la energía cinética no se conserva en esta colisión. De hecho, éste tipo de choques, donde las partículas quedan unidas, se llama choque **perfectamente inelástico**, y es justamente en estos casos donde se pierde la mayor cantidad de energía mecánica [3]. Por el contrario, un choque en el cual se conserva la energía mecánica, se le llama choque **perfectamente elástico**.

Ejemplo 4.2

Ahora consideremos la misma situación anterior inicial pero con el choque completamente elástico.

Solución

En este caso las dos masas no se moverán con la misma velocidad después del choque, por lo tanto el moméntum final es:

$$\vec{P}_f = mv_{mf}\hat{\imath} + Mv_{Mf}\hat{\imath}$$

Así, la ecuación de conservación del moméntum es:

$$mv_0\hat{\imath} = mv_{mf}\hat{\imath} + Mv_{Mf}\hat{\imath}$$

esta es una ecuación vectorial, y para que se cumpla la igualdad el módulo del vector de la derecha tiene que ser igual al de la izquierda, o sea:

$$mv_0 = mv_{mf} + Mv_{Mf}$$

Luego, considerando que en este caso la energía cinética se conserva, se tiene que:

$$K_i = K_f \rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_{mf}^2 + \frac{1}{2}Mv_{Mf}^2$$

Juntando estas últimas dos ecuaciones se obtiene:

[3] Es importante mencionar que la energía no se pierde, de hecho generalmente se transforma en energía interna de los cuerpos.

$$\frac{1}{2}m(v_{mf}+\alpha v_{Mf})^2 = \frac{1}{2}mv_{mf}^2 + \frac{1}{2}Mv_{Mf}^2$$

donde $\alpha = \frac{M}{m}$. Luego desarrollando la ecuación anterior, se obtiene:

$$v_{mf}^2 + 2v_{mf}\alpha v_{Mf} + \alpha^2 v_{Mf}^2 = v_{mf}^2 + \alpha v_{Mf}^2$$

$$2v_{mf} + \alpha v_{Mf} = v_{Mf}$$

$$v_{mf} = \frac{(1-\alpha)}{2}v_{Mf}$$

Ahora podemos reemplazar este resultado en la ecuación proveniente de la conservación del moméntum, y se obtiene que:

$$v_0 = \frac{(1-\alpha)}{2}v_{Mf} + \alpha v_{Mf} => v_0 = \frac{(1+\alpha)}{2}v_{Mf}$$

Finalmente, la velocidad final de la partícula de masa M está dada por:

$$v_{Mf} = \frac{2}{(1+\alpha)}v_0$$

y con este resultado se obtiene que la velocidad final de la partícula de masa m está dada por:

$$v_{mf} = \frac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)}v_0$$

Note que si ambas masas son iguales, esto es $\alpha = 1$, las velocidades de las masas se intercambian. Esto es, la partícula de masa m después del choque queda en reposo y la partícula de masa M se mueve con velocidad final v_0. En el caso que $m < M$, entonces la partícula de masa m adquiere una velocidad negativa después del choque, esto significa que sale en dirección $-\hat{\imath}$, y la partícula de masa M sale en dirección $\hat{\imath}$. Cuando $m > M$, ambas partículas después del choque salen con velocidad en dirección $\hat{\imath}$.

Consideremos ahora el caso más general. Tenemos un sistema compuesto por N partículas, cada una de las cuales puede estar sometida a fuerzas externas o a fuerzas de interacción con las otras partículas del sistema (fuerzas internas). La variación del moméntum total del sistema es entonces

$$\frac{dP_T}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i. \tag{4.11}$$

La fuerza total que actúa sobre la partícula i corresponde a la suma de las fuerzas externas e internas

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{ext,i} + \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}, \tag{4.12}$$

donde $\vec{F}_{ext,i}$ es la suma de todas las fuerzas externas actuando sobre la partícula i y $\vec{F}_{ji}$ es la fuerza que ejerce la partícula j sobre la partícula i ($\vec{F}_{ii} = 0$). Reemplazando en la ecuación anterior tenemos

$$\frac{dP_T}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ext,i} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji}. \tag{4.13}$$

Pero sabemos que el principio de acción y reacción nos dice que $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$, por lo que es fácil ver que la segunda sumatoria será cero. Finalmente:

$$\boxed{\frac{dP_T}{dt} = \vec{F}_{ext}} \tag{4.14}$$

donde $\vec{F}_{ext}$ es la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema. Es decir, como afirmamos al comienzo de esta sección, la tasa de variación del moméntum total del sistema corresponde a la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre él.

Centro de masa 4.4

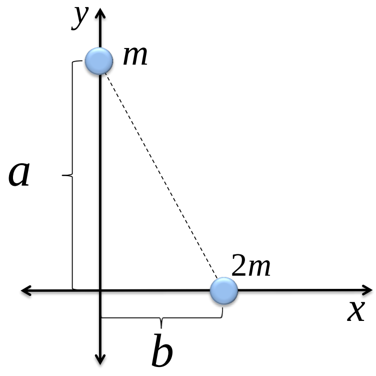
Para entender el concepto de "centro de masa" pensemos primero en el ejemplo más sencillo: Un sistema de partículas compuesto por sólo dos masas idénticas situadas a lo largo del eje x. Si nos preguntamos cuál es el "centro" de las masas que componen este sistema, la respuesta es sencillamente el punto medio entre ambas partículas. Ahora, si una de las partículas tiene una masa mucho mayor que la otra, inmediatamente nos damos cuenta de que este "centro" que estamos buscando debe estar más cerca de la masa grande que de la pequeña. Básicamente, lo que estamos pensando es que al calcular este "centro de masa" debemos tomar en cuenta no sólo la posición de las partículas, si no que también qué porción de la masa aportan al sistema. Matemáticamente todo esto es capturado correctamente por la **posición del centro de masa** (CM) dada por

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}} \tag{4.15}$$

Es decir, corresponde al promedio de las posiciones de las masas ($\vec{r}_i$) ponderadas por la fracción de la masa total que aporta cada una al sistema ($m_i/(m_1 + m_2 + \ldots)$).

Ejemplo 4.3

Dos partículas, una de masa m y la otra de masa $2m$ se ubican sobre el plano xy en las posiciones $(0, a)$ y $(b, 0)$ respectivamente, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la posición del centro de masa del sistema?



Solución

Para encontrar el centro de masa del sistema basta con reemplazar los valores correspondientes en la ecuación (4.15):

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m(0, a) + 2m(b, 0)}{3m} = (2b/3, a/3). \tag{4.16}$$

Intuitivamente esperamos que el centro de masa se ubique a lo largo de la recta que une las dos masas cuya ecuación es $y = a - (a/b)x$. Reemplazando los valores obtenidos para la posición del CM es fácil ver que este punto efectivamente pertenece a esta recta. También es sencillo notar que el CM está más cerca de la masa $2m$ que de la masa m, como era de esperar.

Tomemos ahora la ecuación (4.15), multipliquemos a ambos lados por la masa total $\sum m_j = M$ y derivemos respecto al tiempo. Este último paso lo único que hace es convertir las posiciones en velocidades y tenemos finalmente,

$$M\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... = \sum_j \vec{p}_j = \vec{P}_T. \tag{4.17}$$

Es decir, la masa total por la velocidad del CM corresponde al moméntum total del sistema. Como aprendimos anteriormente, la tasa de cambio en el moméntum total del sistema está dada por la suma de las fuerzas externas que actúan sobre él, de manera que tenemos

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM}. \tag{4.18}$$

En particular, es importante notar que **en la ausencia de fuerzas externas la velocidad del CM de mantiene constante**.

¿ENTENDISTEST? 4.2

Considere dos partículas de masa m que se desplazan a lo largo de una misma línea recta. ¿Con qué velocidad se mueve el centro de masas en los siguientes dos casos?

(a) Ambas partículas se mueven con velocidad $\vec{v}$.

(b) Una de ellas se mueve con velocidad $\vec{v}$ y la otra con velocidad $-\vec{v}$.

Ejemplo 4.4

Una bomba que se encuentra inicialmente estática en el origen del sistema de coordenadas explota fragmentándose en tres partes de igual masa M. Después de la explosión, uno de los fragmentos se mueve en la dirección positiva del eje x con una rapidez v_1, mientras que otro se desplaza en la dirección positiva del eje y con rapidez v_2. ¿Cuál es la velocidad $\vec{v}_3$ de la parte restante?

Solución

El centro de masa tiene inicialmente velocidad cero. Como no existen fuerzas externas aplicadas sobre el sistema, la velocidad del centro de masa después de la explosión deberá seguir siendo nula. Sabemos además que los vectores velocidad asociados a los primeros dos fragmentos son $\vec{v}_1 = v_1\hat{x}$ y $\vec{v}_2 = v_2\hat{y}$. Como las tres masas son iguales tenemos

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{3}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{0}. \tag{4.19}$$

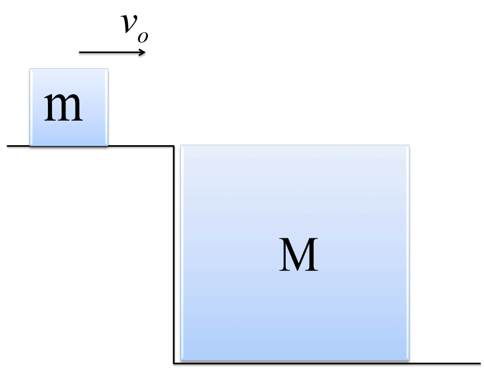
Es decir, las velocidades se deben anular y la velocidad de la tercera masa después de la explosión es

$$\vec{v}_3 = -\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -v_1\hat{x} - v_2\hat{y}. \tag{4.20}$$

Problemas resueltos 4.5

Problema 4.1

Para entender las ventajas que puede tener el uso del concepto de momentum en la solución de problemas, revisitaremos el Problema 2.10b: Una caja de masa m se mueve con rapidez v_0 sobre una superficie horizontal sin roce y al final de su camino logra posicionarse sobre un bloque de masa M, tal como se representa en la figura. El bloque se puede deslizar sin roce sobre el hielo y el coeficiente de roce entre la caja y el bloque es μ. Si la caja se desliza sobre el bloque hasta que finalmente queda en reposo con respecto a éste. ¿Cuál es la velocidad del conjunto una vez que la caja queda en reposo?



Solución

Para solucionar este problema en el Capítulo 2 fue necesario utilizar diagramas de cuerpo libre y ecuaciones de movimiento. Sin embargo, con los conocimientos adquiridos en el presente Capítulo el problema se puede replantear de forma que su solución es muy simple.

Nos damos cuenta que, las situaciones inicial y final de este problema corresponden a lo que hemos denominado un choque perfectamente inelástico. Es decir, hay una colisión entre dos masas, durante el proceso de la colisión las únicas fuerzas relevantes son internas -roce en este caso- y las dos masas se mueven juntas después del “choque”. Usando simplemente la conservación de momentum tenemos,

$$mv_0 = (M + m)v \;\rightarrow\; v = \frac{m}{M + m} v_0, \tag{4.21}$$

donde v es la velocidad final del sistema. ¡En sólo una línea de calculo hemos obtenido el resultado deseado!

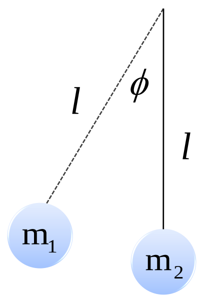
Problema 4.2

Dos bolas de marfil B_1 y B_2 de masas m_1 y m_2 están suspendidas de dos hilos inextensibles de longitud l. Las bolas se tocan cuando los hilos están verticales. Si desplazamos B_1 de su posición de equilibrio un ángulo ϕ y luego la soltamos, entonces se moverá y chocará con la bola 2, que estaba inicialmente inmóvil. Para esta situación calcule:

(a) La velocidad de B_1 justo antes de impactar a B_2.

(b) Las velocidades de ambas bolas justo después de la colisión.

(c) La altura máxima que alcanzará cada bola después del choque, considerando que $m_1 = m_2$.



Solución
a) Si fijamos el cero de la energía potencial a la altura del centro de masa de la bola B_2, se tiene que inicialmente la energía de la bola B_1 está dada por:

$$E_1 = m_1 g(l - l\cos\phi).$$

Como no existen fuerzas disipativas actuando sobre m_1, su energía justo antes del choque será igual a su energía inicial, luego

$$E_2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = E_1,$$

de manera que

$$m_1 gl(1 - cos\phi) = \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2$$

$$v_{1i} = \sqrt{2gl(1 - \cos\phi)}.$$

b) Notar que existen fuerzas externas netas actuando sobre el sistema $\{m_1, m_2\}$, ya que la gravedad actúa sobre ambas masas. En este caso, así como en la mayoría de los choques, debemos recurrir a la llamada *aproximación del impulso*. Ésta consiste en considerar que las fuerzas *entre* los cuerpos involucradas en la colisión son varios órdenes de magnitud mayor que cualquier otra fuerza externa involucrada, durante el tiempo δt que dura la colisión. Es decir, durante ese intervalo podemos pensar que es una buena aproximación no tomar en cuenta las fuerzas externas y aplicar conservación de moméntum:

$$\vec{p}_i = (m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i})\,\hat{x} = \vec{p}_f = (m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f})\,\hat{x},$$

donde $v_{2i} = 0$ ya que la esfera 2 se encuentra inicialmente en reposo. Así,

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}.$$

Además, como el choque es perfectamente elástico, se conserva la energía,

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = E_f = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2.$$

Por otra parte, de la conservación del moméntum despejamos v_{2f}

$$v_{2f} = \frac{m_1 (v_{1i} - v_{1f})}{m_2}$$

Luego, reemplazando esto último en la ecuación para la conservación de energía,

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1 (v_{1i} - v_{1f})}{m_2} \right)^2$$

$$v_{1f}^2 \left(\frac{m_1 + m_2}{2} \right) - m_1 v_{1i} v_{1f} + v_{1i}^2 \left(\frac{m_1 - m_2}{2} \right) = 0$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 v_{1i} \pm \sqrt{m_1^2 v_{1i}^2 - v_{1i}^2 4 \frac{m_1^2 - m_2^2}{4}}}{m_1 + m_2}$$

$$\rightarrow v_{1f} = v_{1i} \frac{(m_1 \pm m_2)}{m_1 + m_2}$$

Como sabemos que la velocidad de m_1 no es exactamente la misma antes y después del choque, la única solución con sentido físico es

$$v_{1f} = v_{1i} \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right).$$

Entonces,

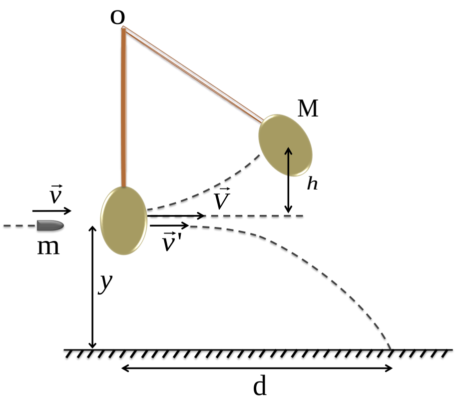
$$v_{2f} = 2v_{1i}\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right),$$

donde v_{1i} fue obtenida en la parte (a).

c) Notar que si $m_1 = m_2$, $v_{1f} = 0$ y $v_{2f} = v_{1i}$. Es decir, la bola 1 se queda quieta y transfiere su moméntum a la bola 2. En este caso, por conservación de la energía es fácil ver que la altura máxima de la bola 2 será la misma desde la cual se soltó la bola 1.

Problema 4.3

Sobre un saco de arena de masa M que pende de un hilo, se dispara una bala de masa m. Producto del impacto el saco de arena se eleva hasta una altura h antes de empezar a caer nuevamente. Por otra parte, la bala atraviesa el saco y recorre una distancia horizontal d antes de pegar en el suelo que se encuentra y por debajo del lugar de impacto con el saco. Calcular la velocidad de la bala en el momento del impacto.



Solución

Por conservación del moméntum lineal tenemos que

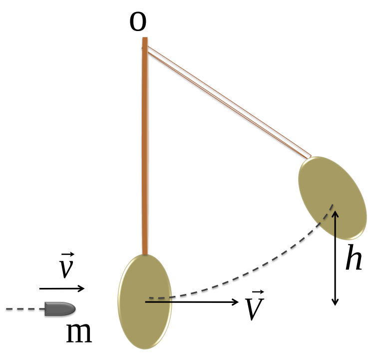
$$mv = MV + mv',$$

donde V es la velocidad del saco inmediatamente después del choque, mientras que v y v' son las velocidades de la bala inmediatamente antes y después del choque. La velocidad inicial de la bala es

$$v = \frac{MV + mv'}{m}.$$

Para obtener V podemos utilizar el principio de conservación de la energía, de manera que la energía cinética de M se transforma en potencial

$$\frac{1}{2}MV^2 = Mgh \to V = \sqrt{2gh}$$



Ahora, para obtener v' fijamos un sistema ortogonal cuyo origen se encuentra en el lugar del impacto. De esta forma,

$$x(t) = v't$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

El tiempo de caída se obtiene imponiendo que en ese instante la altura sea igual a -y

$$t_{caida} = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

Luego,

$$d = v' t_{caida}$$

$$\to v' = d\sqrt{\frac{g}{2y}}.$$

Finalmente,

$$v = \frac{M}{m}\sqrt{2gh} + d\sqrt{\frac{g}{2y}}.$$

Problema 4.4

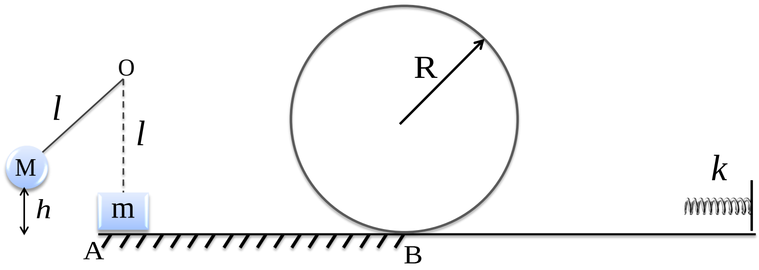
Una masa M cuelga de una cuerda de largo l, y se eleva hasta una altura h con respecto al nivel del suelo. Se suelta y choca elásticamente contra una partícula de masa $m = M/2$ -inicialmente en reposo- que desliza por el trayecto horizontal AB de largo d, cuyo coeficiente de roce con la masa es $\mu = 1/3$. En B la masa m entra a un riel circular sin roce de radio $R = d/2$. Al salir de esta trayectoria circular, la masa puede deslizar por una superficie sin roce, que termina en una muralla que tiene adosado un resorte de constante k.

(a) Calcular la velocidad de M junto antes de impactar a m.

(b) Calcular la energía de la masa m al llegar al punto B.

(c) Calcular la mínima altura h que debe darse a M para que la masa m alcance a pasar por el aro sin caer.

(d) Si h es dos veces el valor encontrado en c, encuentre la máxima compresión del resorte.



Solución
a) Para encontrar la velocidad de M en el punto A, justo antes de chocar a m usamos conservación de la energía. Si escogemos en el suelo el nivel cero de energía potencial gravitatoria, la energía inicial de M es simplemente:

$$E_i = Mgh,$$

en tanto que su energía cuando alcanza el punto A es

$$E_f = \frac{1}{2}Mv^2.$$

Por conservación de energía tenemos entonces,

$$v = \sqrt{2gh}.$$

b) Tomando como sistema $\{M, m\}$, es claro que el moméntum total se conserva desde justo antes y justo después de la colisión (usando la aproximación del impulso explicada en el Problema 4.1). Luego, antes del impacto

$$\vec{p}_i = M\sqrt{2gh}\hat{x},$$

y justo después de impacto

$$\vec{p}_f = (Mv_{fM} + mv_{fm})\,\hat{x}.$$

Luego, por conservación del moméntum

$$M\sqrt{2gh} = Mv_{fM} + mv_{fm}.$$

Como $m = \frac{M}{2}$,

$$v_{fM} = \sqrt{2gh} - \frac{v_{fm}}{2}.$$

Además, como el choque es elástico, se conserva la energía

$$\frac{1}{2}M2gh = \frac{1}{2}Mv_{fM}^2 + \frac{1}{2}mv_{fm}^2$$

$$4gh = 2v_{fM}^2 + v_{fm}^2$$

$$\rightarrow 4gh = 2\left(\sqrt{2gh} - \frac{v_{fm}}{2}\right)^2 + v_{fm}^2.$$

Resolviendo se obtiene

$$v_{fm} = \frac{4}{3}\sqrt{2gh}$$

La energía de la masa m justo después del choque es puramente cinética, esto es,

$$E_A = \frac{1}{2}mv_{fm}^2 = \frac{16}{9}mgh.$$

La superficie AB es rugosa. La fuerza de roce que actúa sobre m en ese trayecto está dada por

$$\vec{F}_r = -\mu N\hat{x} = -\mu mg\hat{x}$$

y el trabajo que realiza la fuerza de roce sobre m durante el trayecto AB es

$$W = -\mu mgd = -\frac{mgd}{3}.$$

Por el teorema de energía-trabajo, la energía de m al alcanzar el punto B está dada entonces por

$$E_B = E_A + W = \frac{1}{9}mg\,(16h - 3d)\,.$$

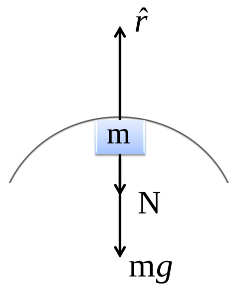
c) Una vez que m entra al loop de radio $R = d/2$, se conserva la energía ya que sobre él actúa sólo la fuerza de gravedad (conservativa) y la normal que es siempre perpendicular al desplazamiento, y por lo tanto no realiza trabajo. Llamemos P al punto superior del loop. Si m alcanza a llegar a P sin caerse, podemos calcular la velocidad que tiene en ese punto usando conservación de la energía,

$$E_P = \frac{1}{2}mv_P^2 + 2mgR = \frac{1}{2}mv_P^2 + mgd.$$

Como $E_P = E_B$,

$$\frac{1}{9}mg\,(16h - 3d) = \frac{1}{2}mv_P^2 + mgd$$

$$\rightarrow v_P^2 = \frac{8g}{9}\,(4h - 3d)\,.$$



Por otra parte, la ecuación de movimiento para la masa m a lo largo del eje radial en el punto P está dado por

$$m\frac{v_P^2}{R} = mg + N$$

donde la normal debe ser $N \geq 0$ para que la masa m no pierda contacto con el riel. En el caso límite tenemos $N = 0$, por lo que el valor mínimo de de la velocidad debe ser

$$v_{Pmin}^2 = gR = \frac{gd}{2} = \frac{8g}{9}(4h - 3d)\,.$$

De esto último obtenemos la altura mínima a la que debe elevarse la masa M para que m alcance a pasar por el riel circular sin caer

$$h_{min} = \frac{57}{64}d.$$

d) A partir del punto B, el resto del camino que recorre m es liso, y por lo tanto la energía m se conserva. Usando

$$E_B = \frac{1}{9}mg\,(16h - 3d)\,,$$

con $h = 2h_{min}$

$$E_B = \frac{17}{6}mgd.$$

Una vez que llega m al resorte y se alcanza la máxima compresión, la energía de m está dada por

$$E_f = \frac{1}{2}k\delta^2$$

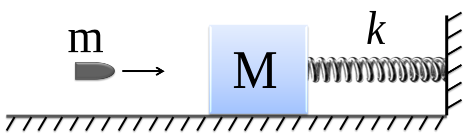
en que δ es la compresión máxima del resorte. Por conservación de energía, entonces tenemos

$$\frac{17}{6}mgd = \frac{1}{2}k\delta^2$$

$$\rightarrow \delta = \sqrt{\frac{17mgd}{3k}}.$$

Problema 4.5

Una bala de masa m que viaja horizontalmente se incrusta en un bloque de madera de masa M que está unido a un resorte espiral de constante k, como se muestra en la figura. Luego del impacto el resorte se comprime una longitud máxima δ. Sabiendo que el coeficiente de roce entre el bloque y el suelo es μ, calcular en función de éstos datos la velocidad de la bala antes del choque



Solución
Por conservación del moméntum y considerando que después de impacto la bala y el bloque se mueven juntos

$$mv = (M + m)V,$$

donde v es la velocidad inicial de la bala y V la velocidad inmediatamente después del choque del sistema bloque + bala. Ahora, el trabajo de la fuerza de roce entre el instante del impacto y el de la máxima compresión δ, es simplemente

$$W = -\mu(M + m)g\delta$$

Por el teorema de energía-trabajo

$$W = E_f - E_i$$

$$-\mu(M + m)gx = \frac{1}{2}k\delta^2 - \frac{1}{2}(M + m)V^2.$$

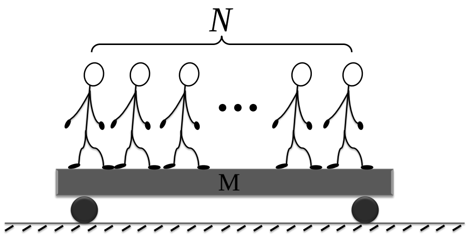
$$\rightarrow V = \sqrt{\frac{2\mu(M + m)gx + k\delta^2}{M + m}}.$$

De la conservación del moméntum, finalmente obtenemos la velocidad inicial de la bala

$$v = \frac{m + M}{m}V = \frac{m + M}{m}\sqrt{\frac{2\mu(M + m)g\delta + k\delta^2}{M + m}}.$$

Problema 4.6

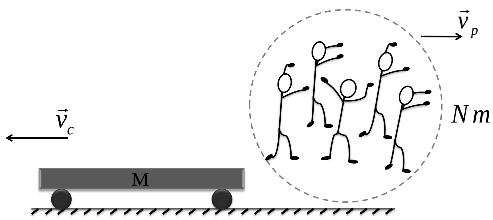
Un grupo de $2N$ alumnos se reúne en el concurso *Jump UC*, que se realiza en el espacio estelar, donde se pueden despreciar fuerzas gravitacionales. Compiten 2 grupos, cada uno de N personas, e inicialmente cada grupo se encuentra sobre un carro de masa M en reposo. El problema consiste en cómo lograr la mayor propulsión para el carro. El primer grupo establece que ésta se logra cuando todos saltan juntos al mismo tiempo. El segundo grupo, establece que es mejor que vayan saltando de a uno. Suponga que cada persona es capaz de saltar con velocidad v relativa al carro. ¿Cuál grupo tiene razón?



Solución
Veamos qué ocurre en cada situación.

Inicialmente $\vec{P}_i = 0$, pues todo se encuentra en reposo. En el primer caso, en que todos saltan juntos, se debe conservar el moméntum antes y después del salto. Esto es

$$\vec{P}_f = M\vec{v}_{carro} + Nm\vec{v}_p = \vec{P}_i = 0.$$



donde $\vec{v}_p$ es la velocidad de una persona después de saltar.

Ahora, se sabe que cada persona salta con velocidad relativa al carro igual a $\vec{v}$. Así, es fácil notar que su velocidad absoluta es

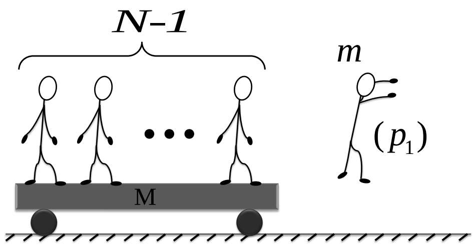
$$\vec{v}_p = \vec{v}_{carro} + \vec{v}.$$

Entonces,

$$M\vec{v}_{carro} = -Nm\left(\vec{v}_{carro} + \vec{v}\right)$$

$$\rightarrow \vec{v}_{carro} = -\vec{v}\left(\frac{Nm}{M + Nm}\right).$$

Ahora analicemos el segundo caso, en que cada persona salta una después de la otra. En la figura se muestra el primer salto.



Sea $\vec{v}_{c1}$ la velocidad del carro luego del salto de la primera persona. Por conservación de moméntum,

$$\vec{0} = m\vec{v}_{p1} + (M + (N-1)m)\,\vec{v}_{c1},$$

donde la velocidad absoluta de la primera persona que saltó es

$$\vec{v}_{p1} = \vec{v}_{c1} + \vec{v}.$$

Así,

$$(M + (N-1)m)\,\vec{v}_{c1} + m\left(\vec{v}_{c1} + \vec{v}\right) = 0$$

$$\rightarrow \vec{v}_{c1} = -\vec{v}\left(\frac{m}{M + Nm}\right)$$

Ahora, repetimos el análisis para cuando salta la segunda persona. Por conservación de moméntum,

$$(M + (N-2)m)\,\vec{v}_{c2} + \vec{v}_{p2}m + \vec{v}_{p1}m = 0$$

$$(M + (N-2)m)\,\vec{v}_{c2} + (\vec{v}_{c2} + \vec{v})m + (\vec{v}_{c1} + \vec{v})m = 0.$$

Usando el resultado anterior,

$$(M + (N-1)m)\,\vec{v}_{c2} + 2m\vec{v} - m\vec{v}\frac{m}{M + Nm} = 0$$

$$(M + (N-1)m)\,\vec{v}_{c2} = m\vec{v}\left(\frac{m}{M + Nm} - 2\right)$$

.

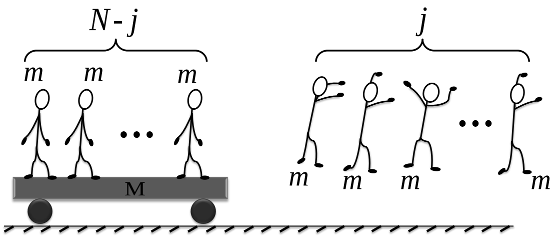
Finalmente,

$$\vec{v}_{c2} = -\vec{v}\frac{m(2M + 2Nm - m)}{(M + (N-1)m)(M + Nm)}.$$

Tratemos ahora de hacer un análisis más general. Situémonos en el momento en que han saltado j personas y consideremos únicamente el sistema formado por las $(N - j)$ personas restantes.

El moméntum de este sistema en ese instante es

$$\vec{P}_i = (M + m(N - j))\vec{v}_{c_j}.$$



El moméntum de este mismo sistema luego del salto de la $j+1$-ésima persona es

$$\vec{P}_f = m(M + (N - j - 1))\vec{v}_{c_{j+1}} + m\vec{v}_{p_{j+1}}$$

donde $\vec{v}_{p_{j+1}} = \vec{v}_{c_{j+1}} + \vec{v}$.
Nuevamente, por conservación de momentum,

$$(M + m(N - j - 1))\vec{v}_{C_{j+1}} + m(\vec{v}_{C_{j+1}} + \vec{v}) = (M + m(N - j))\vec{v}_{Cj}$$

$$(M + m(N - j))\vec{v}_{C_{j+1}} + m\vec{v} = (M + m(N - j))\vec{v}_{Cj}.$$

Se obtiene la siguiente relación de recurrencia para velocidades sucesivas del carro,

$$\vec{v}_{c_{j+1}} = \vec{v}_{c_j} - \vec{v}\frac{m}{(M + m(N - j))}.$$

Dado que la misma relación es válida si cambiamos j por $j - 1$, tenemos que,

$$\vec{v}_{c_{j+1}} = \vec{v}_{c_{j-1}} - \vec{v}\frac{m}{(M + m(N - j + 1))} - \vec{v}\frac{m}{(M + m(N - j))}.$$

Si se sigue reemplazando la formula de recurrencia para j cada vez menor legamos a

$$\vec{v}_{c_{j+1}} = \vec{v}_{c1} - \vec{v}\sum_{i=1}^{j}\frac{m}{(M + m(N - i))}$$

$$\rightarrow \vec{v}_{c_{j+1}} = -\vec{v}\sum_{i=0}^{j}\frac{m}{(M + m(N - i))}.$$

La velocidad final del carro será entonces

$$\vec{v}_{carro} = \vec{v}_{c_N} = -\vec{v}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{m}{(M + m(N - i))}$$

$$\rightarrow \vec{v}_{carro} = -\vec{v}\sum_{i=1}^{N}\frac{m}{(M + m(N - i + 1))}.$$

Recordemos que, en el caso en que todos saltan juntos

$$\vec{v}_{carro} = -\vec{v}\left(\frac{Nm}{M+Nm}\right) = -v\sum_{i=1}^{N}\frac{m}{M+Nm}.$$

Para comparar ambos resultados observamos que

$$\frac{m}{(M+m(N-i+1))} > \frac{m}{M+Nm},$$

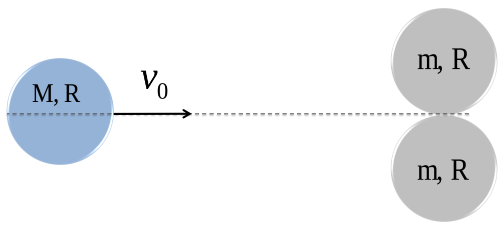
para $i = 2, 3, 4, ...N$. De esta forma, concluímos que la mejor opción de propulsión es que las personas salten una por una.

Problema 4.7

Una bola de masa M y radio R incide sobre un par de esferas del mismo radio, y de igual masa $m \neq M$, como se muestra en la figura. La velocidad inicial de M es v_0 y el choque es perfectamente elástico.

a) Dada la geometría del choque, calcule el ángulo que forma la velocidad de salida de las esferas idénticas con la dirección de incidencia.

b) La relación entre las masas m y M es tal que justo después del choque la esfera incidente se queda detenida. Determine el valor de M/m.



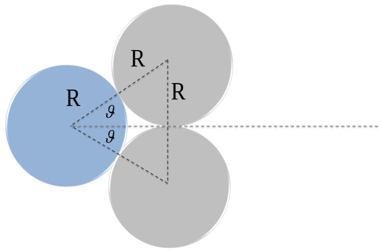
Solución

a) Durante el impacto, sobre la esfera superior derecha actuará una fuerza de interacción con M en la dirección normal a la superficie en el punto de contacto. Esta fuerza formará un ángulo ϑ con la dirección de incidencia (horizontal). Por simple geometría se ve que

$$\sin\vartheta = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \vartheta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Por supuesto, dada la simetría del problema, lo mismo ocurrirá para la esfera inferior. Es decir, la velocidad de salida de las esferas idénticas formará 30 grados con la horizontal.



b) En el sistema de las 3 masas, el moméntum se conserva en todo instante. Si V_f es el módulo de la velocidad final con que emergen las esferas de masa m, podemos escribir el momentum final e inicial del sistema como,

$$\vec{p}_f = Mv_0\hat{x} = mV_f(\cos 30\hat{x} + \sin 30\hat{y}) + mV_f(\cos 30\hat{x} - \sin 30\hat{y})$$

$$\vec{p}_i = Mv_0\hat{x} = 2mV_f\cos 30\hat{x}.$$

Por otra parte, dado que el choque es elástico, se conserva la energía,

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = 2\times\frac{1}{2}mV_f^2 = mV_f^2$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{M}{2m}}v_0 = V_f.$$

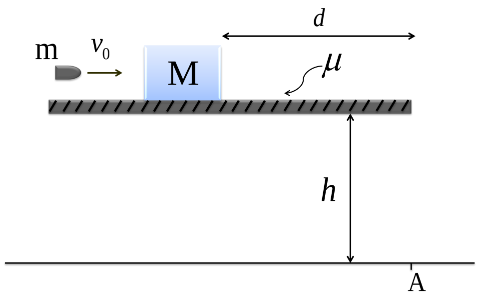
Luego, por conservación de momentum en $\hat{x}$,

$$Mv_0 = 2m\cos 30 v_0\sqrt{\frac{M}{2m}}$$

$$\rightarrow \frac{M}{m} = 2\cos^2 30 = \frac{3}{2}.$$

Problema 4.8

Un bloque de masa M descansa (en reposo) sobre una mesa horizontal a una altura h sobre el piso tal como se muestra en la figura. Una bala de masa $m = M/9$ incide sobre el bloque y se incrusta en él. Luego del choque el sistema m-M se mueve sobre la superficie rugosa de la mesa con un coeficiente de roce dinámico μ.
a) ¿Qué porcentaje de la energía inicial de la bala se pierde inmediatamente después del choque?
b) ¿Qué relación debe haber entre μ, d y g para que el sistema $m-M$ alcance a llegar hasta el final de la mesa?
c) ¿Si el sistema $m-M$ llega hasta el final de la mesa, a qué distancia (medida a partir del punto A) aterriza en el suelo?



Solución

a) El moméntum del sistema $\{m, M\}$ se conserva justo antes y justo después del impacto. Esto es,

$$mv_0 = (M+m)v_f$$

$$\rightarrow v_f = \frac{mv_0}{M+m}.$$

Con esto, la energía cinética del sistema m-M justo después del impacto es

$$K_f = \frac{1}{2}\frac{m^2 v_0^2}{M+m} = K_i\left(\frac{m}{M+m}\right) < K_i$$

donde $K_i = 1/2mv_0^2$ es la energía cinética inicial. Usando que $m = M/9$,

$$K_f = \frac{1}{10}K_i.$$

Es decir, se pierde un 90 % de la energía inicial en el choque inelástico.

b) Llamemos ahora E_i a la energía del sistema m-M justo después del impacto,

$$E_i = \frac{1}{2}\frac{m^2 v_0^2}{M+m}.$$

Suponiendo que el sistema alcanza a llegar al borde de la mesa, en ese instante se tendrá una determinada energía cinética E_f.

Se cumple entonces

$$E_f = E_i + W_{roce},$$

donde el trabajo de la fuerza de roce es, simplemente

$$W_{roce} = -\mu(M+m)gd.$$

De esta forma,

$$E_f = \frac{1}{2}\frac{m^2 v_0^2}{M+m} - \mu(M+m)gd.$$

La condición para que el sistema efectivamente llegue al borde de la mesa es que $E_f \geq 0$

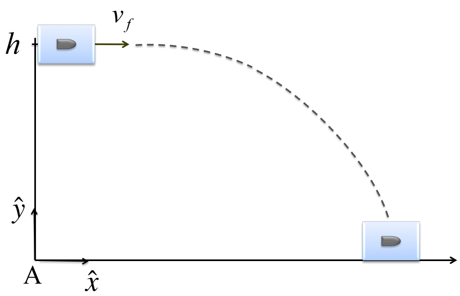
$$\frac{1}{2}\frac{m^2 v_0^2}{M+m} \geq \mu(M+m)gd$$

c) La velocidad que adquiere el sistema m-M al llegar al borde de la mesa -suponiendo que se cumple la desigualdad recien encontrada- está determinada por

$$v_f^2 = \frac{m^2 v_0^2}{(M+m)^2} - 2\mu g d$$

$$\rightarrow v_f = \sqrt{\frac{v_0^2}{100} - 2\mu g d}$$

A partir de ese instante se puede tratar el problema como un simple lanzamiento de proyectil.



Las ecuaciones de movimiento son

$$x(t) = v_f t$$

$$y(t) = h - \frac{gt^2}{2}$$

El tiempo que demora en caer se determina a partir de la ecuación

$$y(t) = 0 = h - \frac{gt^2}{2}$$

$$\rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Finalmente, la distancia a la que cae medida desde el punto A es

$$x(t^*) = v_f \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

5

Moméntum angular y torque

Introducción 5.1

Hasta ahora hemos visto que existen dos cantidades fundamentales para el estudio de la dinámica de los cuerpos: el moméntum lineal y la fuerza. En este capítulo introduciremos dos cantidades íntimamente relacionadas con estas últimas: el moméntum angular y el torque. La definición de estas nuevas cantidades nos permitirá resolver una amplia variedad de problemas que no serían sencillos de abordar de otra forma. Para estudiar los conceptos antes mencionados y seguir adecuadamente la metodología propuesta en este capítulo, es fundamental que el alumno ya haya aprendido y domine los conceptos de vectores y producto vectorial (ver Apéndice A).

Moméntum angular 5.2

El moméntum angular es una cantidad física que nos dice qué tanto "movimiento rotacional" tiene un determinado objeto. Esto es análogo a la "cantidad de movimiento" que nos entrega el moméntum lineal. Para definir esta nueva cantidad rigurosamente, consideremos primero el caso más sencillo de un sistema formado por una sola partícula de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$ respecto a un punto Q como se muestra en la Fig. 5.1.

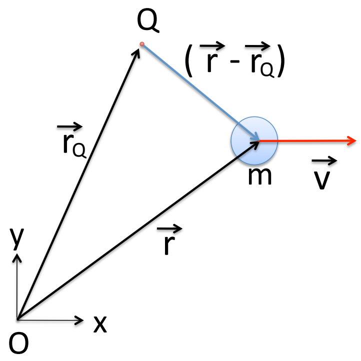


Figura 5.1: Partícula de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$ respecto a un punto Q.

El moméntum angular de esta partícula respecto al punto Q está dado por

$$\boxed{\vec{L}_Q = (\vec{r} - \vec{r}_Q) \times \vec{p} = (\vec{r} - \vec{r}_Q) \times m\vec{v}} \tag{5.1}$$

donde $\vec{r}$ es el vector posición de la partícula respecto al origen del sistema de coordenadas, $\vec{v}$ es su velocidad y $\vec{r}_Q$ es el vector posición del punto Q. Es muy importante tener en cuenta que el moméntum angular depende del punto respecto al cual se desea calcular; en este caso el punto Q. Enfatizamos este concepto con el subíndice Q en $\vec{L}_Q$.

Ejemplo 5.1

A modo de ejemplo expresaremos el vector $\vec{L}_Q$ en el sistema de coordenadas particular de la Fig. 5.2, en el cual su origen coincide con el punto Q y la velocidad v de la partícula está en la dirección $\hat{x}$.

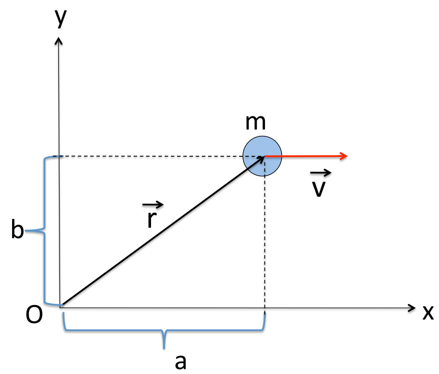


Figura 5.2: Partícula de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en dirección $\hat{x}$.

Aquí el moméntum angular respecto a Q, que en este caso coincide con el origen O, es:

$$\vec{L}_Q = \vec{r} \times \vec{p} = (a\hat{x} + b\hat{y}) \times (mv\hat{x}) = amv(\hat{x} \times \hat{x}) + bmv(\hat{y} \times \hat{x}) = bmv\hat{z}. \tag{5.2}$$

En este resultado es importante notar que éste no depende del valor a, de hecho sólo importa la componente del vector $\vec{r}$ que es perpendicular a $\vec{v}$. Recuerde que $\hat{z}$ es un vector unitario perpendicular al plano xy.[1] Note que el valor de $\vec{L}_Q = bmv\hat{z}$ es independiente del sistema de coordenadas utilizado.

Para un sistema compuesto de más partículas, el moméntum angular total se define como la suma del moméntum angular de cada partícula. Esto es,

$$\boxed{\vec{L}_{tot} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 + \ldots + \vec{r}_N \times \vec{p}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i} \tag{5.3}$$

dónde N es el número de partículas que componen el sistema, y el subíndice i denota la cantidad correspondiente asociada a cada partículas.

Ejemplo 5.2

Una partícula de masa m_1 parte en $t = 0$ desde la posición $\vec{r}_1 = a\hat{x}$ y se mueve con velocidad constante $\vec{v}_1 = -v_1\hat{x}$. Por su parte, otra partícula de masa m_2 parte en $t = 0$ desde $\vec{r}_2 = b\hat{y}$ y se mueve con velocidad constante $\vec{v}_1 = -v_2(\hat{x} + \hat{y})/\sqrt{2}$.

(a) Calcule el moméntum angular total en torno al origen del sistema de coordenadas.

(b) Encuentre el moméntum angular total del sistema en torno a la posición $(0, b/2)$.

Solución

(a) Al calcular el moméntum angular respecto al punto O, nos damos cuenta de que para la partícula 1 la velocidad es paralela a la posición y por lo tanto el producto cruz entre ambas es cero y no contribuye al moméntum angular. Para la partícula 2 vemos que la componente y de la velocidad también es paralela a la posición y por lo tanto sólo la componente x contribuye al momento angular. Obtenemos finalmente,

$$\vec{L}_{tot} = \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2 = -m_2 b \frac{v_2}{\sqrt{2}}(\hat{y} \times \hat{x}) \tag{5.4}$$

$$= \frac{m_2 b v_2}{\sqrt{2}}\hat{z}. \tag{5.5}$$

(b) En lo que respecta a la partícula 2, su posición tiene ahora la misma dirección pero la mitad de la magnitud que en el caso anterior, por lo que es fácil ver que su contribución al moméntum angular total es

$$\vec{L}'_2 = \frac{m_2 b v_2}{2\sqrt{2}}\hat{z}. \tag{5.6}$$

---

[1] Si el estudiante no ha aprendido el concepto de producto vectorial (o producto cruz), es muy importante que repase este concepto antes de continuar (ver Apéndice A).

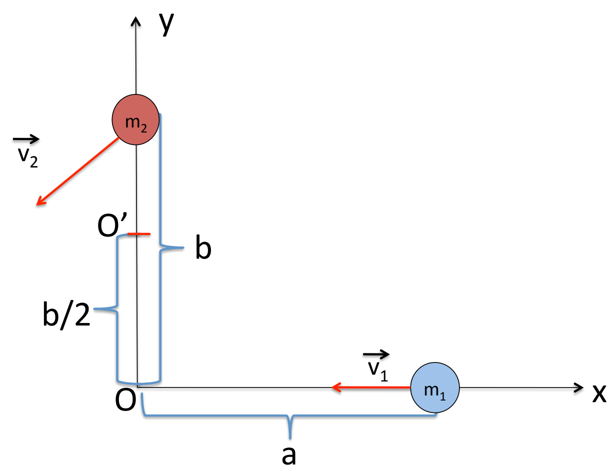


Figura 5.3: Dos partículas de masa m_1 y m_2 se mueven con velocidad constante en el plano “*xy*”.

Con respecto a O' la posición de la masa 1 es $\vec{r}'_1 = a\hat{x} - \frac{b}{2}\hat{y}$ y recordando que la componente paralela a la velocidad no contribuye al momento angular tenemos

$$\vec{L}'_1 = m_1 v_1 \frac{b}{2}(\hat{y} \times \hat{x}) \tag{5.7}$$

$$= -\frac{m_1 b v_1}{2}\hat{z}. \tag{5.8}$$

Entonces, el moméntum angular total en torno a O' es

$$\vec{L}'_{tot} = \vec{L}'_1 + \vec{L}'_2 = \left(\frac{m_2 b v_2}{2\sqrt{2}} - \frac{m_1 b v_1}{2}\right)\hat{z} \tag{5.9}$$

$$= \frac{b}{2\sqrt{2}}(m_2 v_2 - \sqrt{2} m_1 v_1)\hat{z}. \tag{5.10}$$

Note que el signo menos que aparece en este resultado proviene del hecho que el vector moméntum angular de la partícula 1 apunta en sentido opuesto al de la partícula 2, por lo tanto el moméntum angular total es la resta de ambos moméntum.

Torque 5.3

El torque es una cantidad vectorial asociada a las fuerzas que actúan sobre un sistema, y nos indica la tasa de cambio del moméntum angular que estas fuerzas producen. El torque y el moméntum angular se relacionan de una manera análoga a la relación entre la fuerza y el "moméntum lineal", sin embargo, el torque al igual que el moméntum angular, es una cantidad que está referida a un punto espacial.

Nuevamente recurriremos al caso de un sistema compuesto por una sola partícula para introducir la definición de torque. Para empezar, tomemos el moméntum angular definido en (5.1) y veamos cuál es su tasa de cambio en el tiempo, es decir,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{5.11}$$

Pero $d\vec{r}/dt$ es precisamente la velocidad $\vec{v}$ y por lo tanto el primer término de la derecha corresponde al "producto cruz" entre dos vectores paralelos que, como sabemos, es cero. Nos queda entonces sólo el segundo término en el que notamos que aparece $md\vec{v}/dt = m\vec{a} = \vec{F}$. A esta tasa de variación de moméntum angular producida por una determinada fuerza $\vec{F}$ aplicada en la posición $\vec{r}$ de la llamamos torque ($\vec{\tau}$):

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}} \tag{5.12}$$

Al igual que el moméntum angular, esta cantidad depende de la posición respecto a la cual se le quiere calcular, es decir, el punto respecto al cual está tomada la posición **??**. La generalización para un sistema de muchas partículas es directa, ya que el torque total corresponderá a la suma de los torques aplicados sobre cada una de ellas, es decir,

$$\boxed{\vec{\tau}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i} \tag{5.13}$$

Ejemplo 5.3

Las partículas de masas m_1 y m_2 de la Fig. 5.4 se encuentran unidas mediante una vara rígida de largo L, masa cero que forma un ángulo de 45° con el eje x. La masa 1 está sometida a la fuerza externa $\vec{F}_{ext,1} = F\hat{x}$, mientras que la masa 2 está sometida a $\vec{F}_{ext,2=} - F\hat{x}$. Determine el torque total respecto al centro de la vara.

Solución

Primero notemos que las fuerzas que ejerce la vara sobre las masas ($\vec{F}_v$) no contribuyen, ya que su línea de acción pasa por el punto en torno al cual queremos calcular el torque. Además, este problema se vuelve más sencillo si notamos que $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$ y $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, por lo que obviamente la contribución de las dos fuerzas externas al torque total es la misma. Entonces, tomando en cuenta que la componente de la posición paralela a la fuerza no contribuye al torque tenemos,

$$\vec{\tau}_{tot} = 2\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = -2\frac{L}{2\sqrt{2}}\hat{y} \times F\hat{x} \tag{5.14}$$

$$= \frac{FL}{\sqrt{2}}\hat{z}. \tag{5.15}$$

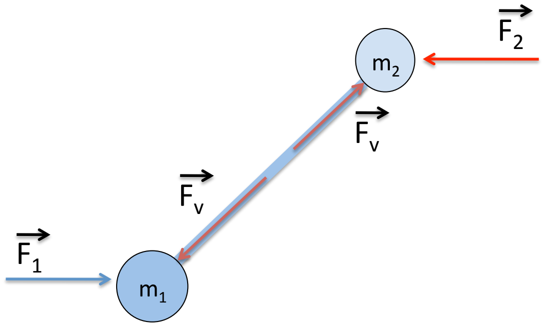


Figura 5.4: Sistema formado por dos partículas de masas m_1 y m_2 unidas por una barra rígida sin masa, el cual está sometido a la acción de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

Como vimos en el ejemplo anterior, la fuerza neta que actúa sobre la partícula i se puede descomponer en fuerzas externas y fuerzas internas. Estas últimas corresponden a las fuerzas ejercidas por las otras partículas que conforman el sistema. Esto es,

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{ext,i} + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji}, \tag{5.16}$$

donde $\vec{F}_{ji}$ es la fuerza que ejerce la partícula j sobre la partícula i. Obviamente $\vec{F}_{ii} = 0$ ya que la partícula no ejerce fuerza sobre si misma. Insertando este resultado en (5.13) obtenemos

$$\vec{\tau}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext,i} + \sum_{i \neq j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} \tag{5.17}$$

Analicemos el segundo término de la derecha. Pensemos en un determinado elemento de la suma, por ejemplo el correspondiente al par (i', j'), es decir, $\vec{r}_{i'} \times \vec{F}_{j'i'}$ (note que éste término corresponde al torque que ejerce la partícula ubicada en $\vec{r}_{j'}$ sobre la partícula ubicada en $\vec{r}_{i'}$). Existe otro término en la suma que corresponde a intercambiar estos índices, es decir, $\vec{r}_{j'} \times \vec{F}_{i'j'}$ (que es el torque que ejerce la partícula ubicada en $\vec{r}_{i'}$ sobre la partícula ubicada en $\vec{r}_{j'}$). Sumando estos dos términos y recordando que por el principio de acción y reacción $\vec{F}_{i'j'} = -\vec{F}_{j'i'}$ tenemos,

$$\vec{r}_{i'} \times \vec{F}_{j'i'} + \vec{r}_{j}' \times \vec{F}_{i'j'} = (\vec{r}_{i'} - \vec{r}_{j'}) \times \vec{F}_{j'i'}. \tag{5.18}$$

Pero la línea de acción de $\vec{F}_{j'i'}$ es precisamente paralela al vector $\vec{r}_{i'j'} = (\vec{r}_{i'} - \vec{r}_{j'})$ que une las dos partículas. Su producto cruz es entonces cero y concluimos que las fuerzas internas no contribuyen al torque total aplicado sobre el sistema:

$$\boxed{\vec{\tau}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext,i}} \tag{5.19}$$

De esto se desprende directamente que, en ausencia de torques ejercidos por fuerzas externas, no existe torque neto y por lo tanto el moméntum angular se mantiene constante o “se conserva”. Esto es muy similar a lo que ocurre en el caso del momentúm lineal y su conservación en ausencia de fuerzas externas.

¿ENTENDISTEST? 5.1

Considere nuevamente el caso mostrado en la Fig. 5.4. ¿En qué dirección deberían ser aplicadas las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ para que el moméntum angular del sistema permanezca constante?

Ejemplo 5.4

Considere el alicate de corte mostrado en la Fig. 5.5, el cual es utilizado para cortar un alambre de cobre mediante la aplicación de dos fuerzas iguales y opuestas en su mango. Si el módulo de la fuerza de corte máxima que resiste el alambre cuando se corta con este alicate es F_c, determine el valor del módulo de la fuerza aplicada F.

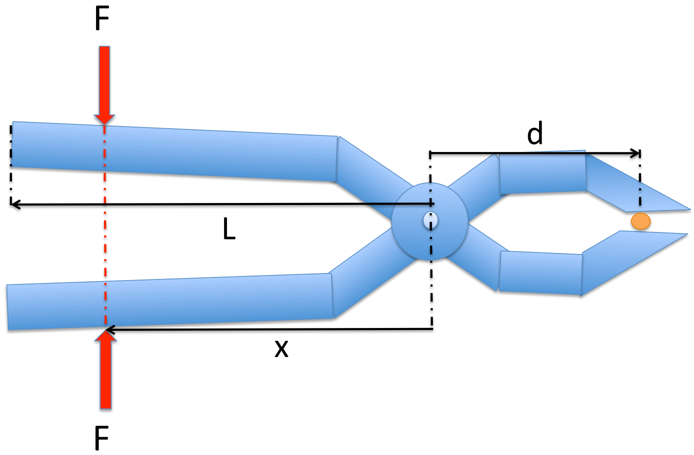


Figura 5.5: Vista lateral de un alicate cortando un alambre de cobre.

Para calcular el módulo F, consideraremos el diagrama de cuerpo libre de un solo brazo del alicate (ambos son equivalentes), tal como se muestra en la Fig. 5.6.

Note que F_c es el módulo de la fuerza que el alambre ejerce sobre el brazo del alicate y R es la reacción que ejerce el pasador sobre este brazo. Considerando justo el instante antes de que el alambre se corte, en el cuál el brazo está en equilibrio, se tiene lo siguiente:

(I) La fuerza neta actuando sobre el brazo debe ser cero. Si no fuera así, el brazo tendría una aceleración distinta de cero, lo que no tiene sentido. Por lo tanto,

$$F + F_c = R\cos\theta \tag{5.20}$$

$$R\sin\theta = 0 \tag{5.21}$$

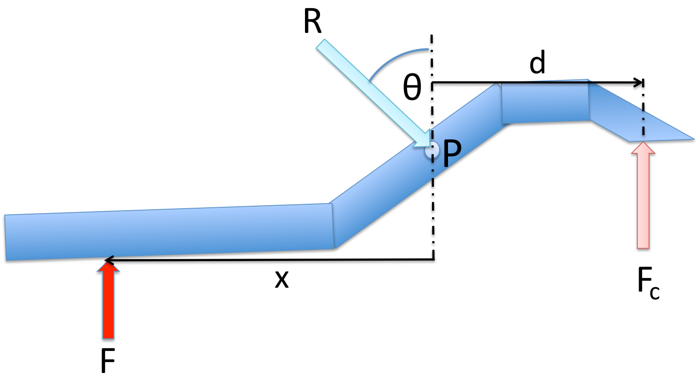


Figura 5.6: Diagrama de cuerpo libre de un brazo del alicate

Con esto se obtiene que R debe estar orientada verticalmente ($\theta = 0$). Esto es evidente, ya que no existen otras fuerzas horizontales actuando sobre el brazo.

(II) El torque neto respecto al punto P debe ser cero. Si no fuera así, el moméntum angular respecto al punto P, que en este caso es cero, variaría respecto al tiempo, lo que no tiene sentido. Como veremos en la sección siguiente, decir que el moméntum angular no varía respecto al tiempo, es equivalente a decir que la aceleración angular es cero. Por lo tanto,

$$Fx = F_c d, \tag{5.22}$$

ya que la reacción R no realiza torque respecto al pivote P. Por lo tanto de esta última ecuación se obtiene que el módulo de la fuerza F está dado por:

$$F = F_c \frac{d}{x} \tag{5.23}$$

¿ENTENDISTEST? 5.2

Considere nuevamente el caso presentado en la Fig. 5.5. Si usted quisiera cortar el alambre aplicando la menor fuerza posible, ¿dónde aplicaría esta fuerza? ¿Que modificación le realizaría usted a esta herramienta para disminuir aún más la fuerza requerida para cortar el alambre?

5.4 Rotación en torno a un eje fijo

Un caso particular muy importante ocurre cuando una masa puntual gira en torno a un eje que se encuentra fijo en el espacio, describiendo una trayectoria circular. Si tomamos este eje como el eje "z" entonces la posición de la partícula es

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}, \tag{5.24}$$

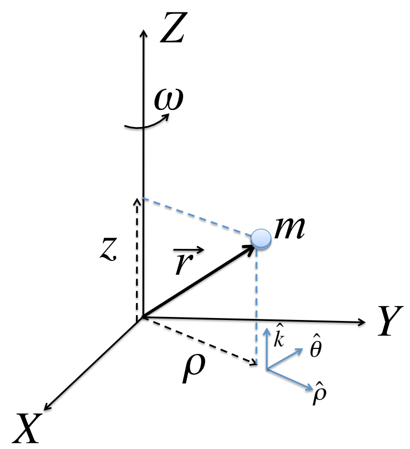


Figura 5.7: Cuerpo de masa m que rota en torno a un eje fijo.

donde ρ es la distancia al eje de rotación y z es la altura sobre el plano "xy" (ver Fig. 5.7). Ambas cantidades son constantes en este caso.

La velocidad en tanto es un vector de la forma

$$\vec{v} = v\hat{\theta}, \tag{5.25}$$

donde v tiene el mismo módulo que la velocidad y su signo indica el sentido de rotación. Entonces, efectuando el correspondiente producto cruz, obtenemos que el moméntum angular es

$$\vec{L} = mv\rho\hat{k} - mvz\hat{\rho}. \tag{5.26}$$

Notemos que la componente "z" (dirección $\hat{k}$) del moméntum angular no depende del la coordenada z de la partícula, sino que depende sólo del eje de rotación escogido y de la velocidad angular $\omega = v/\rho$:

$$L_z = m\rho^2\omega = I_z\omega. \tag{5.27}$$

En esta última igualdad hemos definido $I_z = m\rho^2$ como el "momento de inercia" de la partícula de masa m en torno a su eje de rotación que se encuentra a una distancia ρ. Note que ρ es la distancia más corta entre la partícula y el eje de rotación (ver Fig. 5.7).

Supongamos ahora que se tienen muchas masas girando con la misma velocidad angular ω en torno al mismo eje fijo "z". En base al mismo razonamiento utilizado para una sola partícula, se obtiene directamente,

$$\boxed{L_z = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\rho_i^2\right)\omega = I_z\omega} \tag{5.28}$$

donde definimos el momento de inercia total del sistema en torno al eje z como la suma de los momentos de inercia de cada una de las partículas. Es importante notar que en este caso las partículas conforman lo que llamamos un "cuerpo rígido", es decir, que las posiciones relativas entre las masas puntuales son fijas.

Si sobre el cuerpo rígido actúan fuerzas, éstas pueden ejercer un torque en la dirección z (τ_z) que corresponde a la tasa de variación del momento angular,

$$\boxed{\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z\alpha} \tag{5.29}$$

donde α es la aceleración angular. Es interesante notar que el momento de inercia juega un rol parecido al de la masa en el moméntum lineal: mientras la masa indica la resistencia que ofrece el cuerpo a la aceleración lineal, el momento de inercia indica la resistencia del cuerpo a la aceleración angular.

Momento de inercia de un cuerpo rígido 5.4.1

El momento de inercia es una cantidad escalar asociada a un eje de rotación dado, y su valor depende de como se distribuye espacialmente la masa del cuerpo. Si el cuerpo rígido es un cuerpo continuo, como por ejemplo un cilindro o una esfera sólida, el momento de inercia respecto a un eje cualquiera, se puede calcular mediante el uso de las herramientas matemáticas de integración. Dado que el lector podría no estar familiarizado con ésta herramienta, en la Fig. 5.8 se muestran algunos momentos de inercia de objetos que se utilizan comúnmente. Estos han sido calculados respecto a ejes que pasan por el centro de masa de los cuerpos en una orientación dada, en tanto que la densidad de masa ha sido considerada como homogénea.

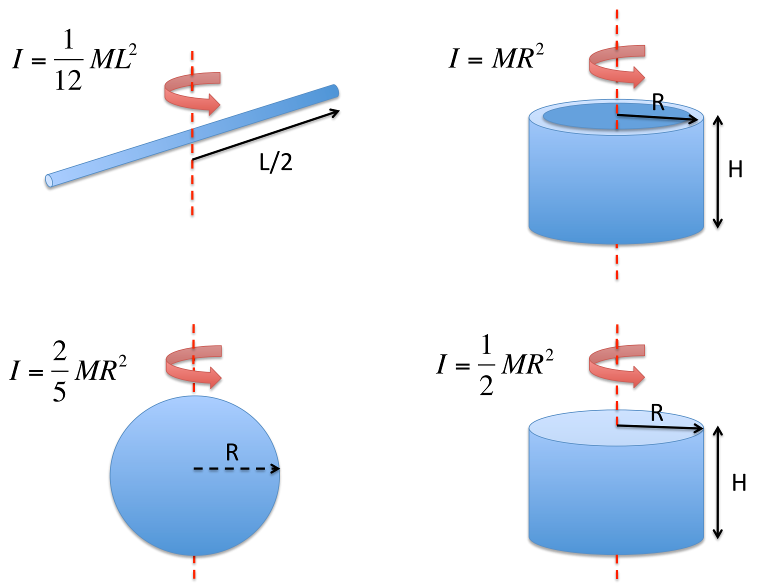


Figura 5.8: Momentos de inercia de algunos objetos homogéneos que se utilizan comúnmente. M corresponde a la masa total del objeto en cuestión.

En la figura anterior es interesante notar que en el caso del tubo y del cilindro, el momento de inercia no depende de la dimensión H. De hecho, el resultado obtenido para el tubo, es el mismo que se obtiene para el momento de inercia de un anillo como el mostrado en Fig. 5.9. Este caso es particularmente instructivo, ya que podemos notar que toda la masa del cuerpo está a la misma distancia R del eje de rotación. Si imaginamos que el anillo está formado por una colección de masas puntuales (m_i), el momento de inercia estaría dado por:

$$I = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i R^2 \right) = R^2 \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right) = R^2 M, \tag{5.30}$$

que es justamente el resultado antes mencionado.

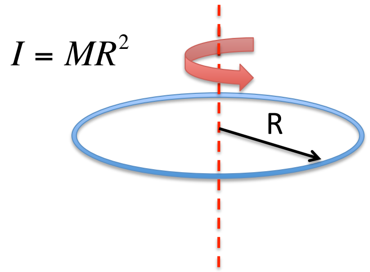


Figura 5.9: Momento de inercia de un anillo homogéne de masa M y radio R, respecto a un eje que pasa por su centro de masa.

¿ENTENDISTEST? 5.3

En la Fig. 5.8 se presenta el valor del momento de inercia de una esfera maciza de masa M y radio R respecto a un eje que pasa por su centro de masa. Si ahora consideramos un cascarón esférico de masa M y radio R, ¿el momento de inercia respecto a su centro de masa, sería mayor o menor que el de la esfera maciza?

Teorema de los ejes paralelos 5.4.2

A continuación introduciremos una herramienta muy útil, conocida como el teorema de los ejes paralelos, o **teorema de Steiner**. Este establece que los momentos de inercia de un cuerpo de masa M con respecto a ejes paralelos, donde uno de ellos pasa por el centro de masa, están relacionados a través de la siguiente expresión.

$$I = I_{CM} + Md^2, \tag{5.31}$$

donde d es la distancia entre ambos ejes e I_{CM} es el momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro de masas del cuerpo.

Ejemplo 5.5

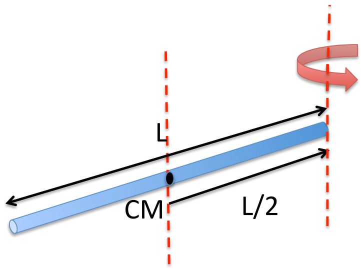


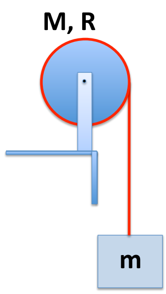
Figura 5.10: Barra de longitud L y masa M que rota respecto a un eje perpendicular que pasa por uno de sus extremos.

A modo de ejemplo, calculemos el momento de inercia de una barra homogénea de masa M y largo L, respecto a un eje que pasa por uno de sus extremos, tal como se muestra en Fig. 5.10 (Note que ambos ejes son perpendiculares al eje de la barra). Para este caso ya conocemos el valor de I_{CM} (Fig. 5.8), y la distancia entre ejes es justamente $L/2$, por lo tanto se obtiene que el momento de inercia de la barra respecto a un eje que pasa por uno de sus extremos es:

$$I = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4} = \frac{ML^2}{3}, \tag{5.32}$$

Ejemplo 5.6

Un disco uniforme de radio R y masa M está montado en un eje apoyado en rodamientos sin fricción, como se ve en la figura. Una cuerda ligera está enrollada en el borde del disco y su otro extremo está atado a una caja de masa m. Si en cierto instante t_0 la caja se suelta, encuentre la aceleración de la caja.



Solución

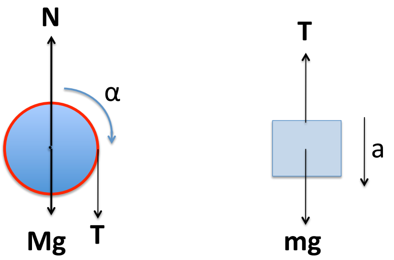
Para resolver este problema primero se realizan los diagramas de cuerpo libre que se muestran más abajo, y luego se plantean las ecuaciones que rigen el movimiento.

Para el bloque de masa m se tiene que:

$$ma = mg - T, \tag{5.33}$$

y para la polea de masa M se tienen dos ecuaciones, una corresponde al equilibrio de fuerzas verticales, y la otra al aplicar la ecuación 5.19 respecto al eje de rotación.

$$Mg + T = N, \tag{5.34}$$



$$I\alpha = T, \tag{5.35}$$

donde el momento de inercia de la polea respecto al eje de rotación es $I = MR^2/2$, ya que lo consideraremos como el de un disco homogéneo. Aquí hemos despreciado la masa de la cuerda enrollada.

Ahora debemos encontrar una relación entre a y α. Para ello consideraremos que la cuerda se desenrolla si deslizar respecto a la superficie de la polea, por lo tanto:

$$\alpha R = a, \tag{5.36}$$

Luego reemplazando 5.36 en 5.35 y luego en 5.33, se obtiene finalmente que:

$$a = \frac{g}{(M/2m + 1)}, \tag{5.37}$$

Note que si la masa de la polea es despreciable, o sea $M/2m \to 0$, el módulo de la aceleración del bloque es justamente g.

Energía rotacional 5.4.3

Supongamos que tenemos un cuerpo rígido conformado por N partículas y que gira en torno a un eje fijo. Sabemos que la magnitud de la velocidad de la masa i viene dada simplemente por $v_i = \rho_i\omega$, donde ρ_i es su distancia al eje de rotación. Por lo tanto, la energía cinética total del cuerpo es

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I\omega^2, \tag{5.38}$$

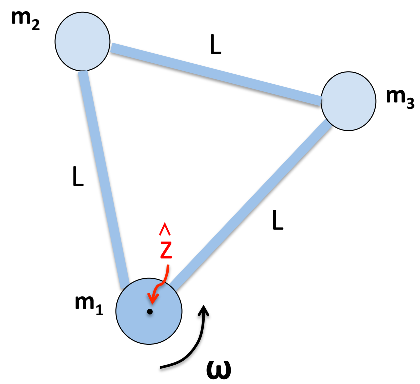
donde I es el momento de inercia tomado en torno al eje de rotación. Observando la forma de este último resultado, notamos que otra vez el momento de inercia del cuerpo juega un rol análogo al de la masa de una partícula, mientras que la velocidad angular juega un rol análogo al de la velocidad lineal.

Ejemplo 5.7

Un cuerpo rígido está formado por tres masas ubicadas en las aristas de un triángulo equilátero de lado l como se muestra en la figura. El cuerpo yace sobre el plano xy y puede rotar con velocidad angular ω en torno al eje z que pasa por la masa 1. Determine,

(a) El momento de inercia del cuerpo en torno al eje z.

(b) El moméntum angular y la energía cinética total.



Solución
(a) Debido a que la distancia al eje de la masa 1 es nula, ésta no contribuye al momento de inercia. Como la distancia al eje de las otras dos partículas es l el momento de inercia del cuerpo en torno al eje z es,

$$I_z = (m_2 + m_3)l^2. \tag{5.39}$$

(b) Recordando lo visto anteriormente, para un cuerpo rígido en rotación en torno a un eje fijo tenemos,

$$L_z = I_z\omega = (m_2 + m_3)l^2\omega. \tag{5.40}$$

Como tenemos el momento de inercia del cuerpo en torno al eje z y su velocidad angular es fácil obtener la energía cinética total como,

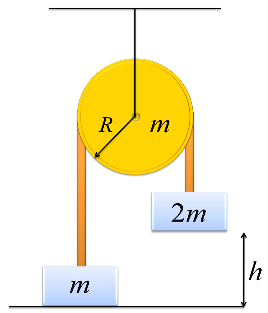
$$K = \frac{1}{2}I_z\omega^2 = \frac{1}{2}(m_2 + m_3)l^2\omega^2. \tag{5.41}$$

Ejercicios resueltos 5.5

Problema 5.1

Considere la máquina de Atwood mostrada en la figura, en la cual inicialmente el bloque de masa m está apoyado en el piso y el bloque de masa $2m$ está a una altura h.

La polea es esencialmente un disco uniforme de masa m y radio R, y la cuerda tiene masa despreciable y no desliza sobre la polea. Si en cierto instante el sistema se deja evolucionar libremente, determine.



(a) La velocidad del bloque de masa $2m$ cuando éste llega al suelo, utilizando el teorema de conservación de la energía.

(b) La tensión de la cuerda en ambos extremos de la polea, en función de m, g y R.

(c) La tensión en la cuerda que sujeta la polea mientras los bloques están en movimiento.

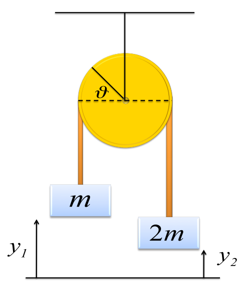
(d) La tensión de la cuerda que sujeta la polea después de que el bloque de masa $2m$ llega al suelo (y todas las componentes de la máquina están en reposo).

Solución

(a) La energía inicial de la configuración es:

$$E_i = 2mgh + mgH$$

donde hemos establecido que la energía potencial gravitacional es cero al nivel del piso, y H es la altura del centro de masas de la polea (constante). En base a las coordenadas definidas en la figura siguiente,



y considerando que la cuerda es inextensible, se tiene que

$$y_1 + y_2 = cte$$

derivando en función del tiempo se obtiene

$$\dot{y}_1 = -\dot{y}_2$$

Luego dado que la cuerda no desliza respecto al disco,

$$R\dot{\vartheta} = \dot{y}_1.$$

Definamos como v_0 al módulo de la velocidad del cuerpo de masa $2m$ cuando éste llega al suelo. Por supuesto el módulo de la velocidad del cuerpo de masa m también será v_0, y la velocidad angular de la polea en ese instante será

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R}.$$

Luego, si el cuerpo de masa $2m$ ha bajado una altura $2h$, el cuerpo de masa m ha subido una altura $2h$. Así, la energía en el instante en que la masa $2m$ llega al suelo es

$$E_f = mgh + mgH + \frac{1}{2}(2m)v_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mI_{CM}\omega_0^2$$
$$E_f = mgh + mgH + 2mv_0^2.$$

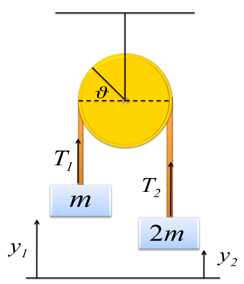
Como no existen fuerzas externas no conservativas actuando sobre el sistema, la energía se conserva, por lo tanto

$$E_i = E_f \rightarrow 2mgh + mgH = mgh + mgH + 2mv_0^2,$$

ecuación de la cual podemos despejar la velocidad del bloque de masa $2m$ cuando éste llega al suelo,

$$gh = 2v_0^2$$
$$v_0 = \sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

(b) Para calcular la tensión de la cuerda en ambos extremos de la polea, consideremos el siguiente diagrama,



Las ecuaciones de movimiento para las masas son

$$T_1 - mg = m\ddot{y}_1$$

$$T_2 - 2mg = 2m\ddot{y}_2 \rightarrow 2mg - T_2 = 2m\ddot{y}_1$$

La ecuación de torques sobre la polea con respecto a su centro de gravedad da

$$\sum \tau_G = -R\hat{x} \times -T_1\hat{y} + R\hat{x} \times -T_2\hat{y} = (RT_1 - RT_2)\,\hat{z}$$

Por otro lado,

$$\sum \tau_G = \frac{d\vec{L}_G}{dt} = -I_G\alpha\hat{z}$$

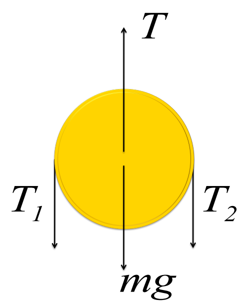
El signo menos se debe a que el sentido de crecimiento de ϑ implica un giro en sentido horario. Con esto,

$$RT_2 - RT_1 = I_G\alpha$$

Resolviendo, se obtiene

$$\ddot{y}_1 = \frac{2g}{7}$$
$$T_1 = \frac{9mg}{7}$$
$$T_2 = \frac{10mg}{7}$$

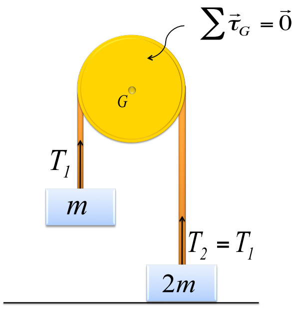
(c) Del equilibrio de fuerzas para la polea, se tiene



$$T = T_1 + T_2 + mg$$

donde T es la tensión en la cuerda que sujeta la polea

$$T = \frac{26mg}{7}$$



(d) Cuando la masa $2m$ ha llegado al suelo y todo está detenido, el torque total sobre la polea con respecto a su centro de masas es nulo, y por lo tanto las tensiones sobre los extremos de la polea deben ser iguales.

Del equilibrio de fuerzas para m,

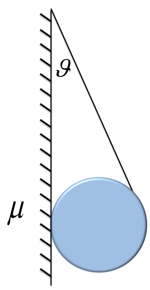
$$T_1 = mg = T_2$$

Así

$$T = T_1 + T_2 + mg = 3mg.$$

Problema 5.2

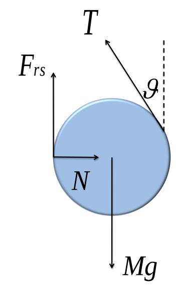
Una esfera de radio R y masa M es sostenida por una cuerda de manera tal que esta queda orientada tangente a la esfera, tal como se muestra en la figura. Si el ángulo entre la cuerda y la pared es ϑ ¿Cuál es el mínimo coeficiente de roce estático entre la esfera y la pared para que ésta no caiga?



Solución
Para que la esfera esté en equilibrio se requiere que

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad y \quad \sum \vec{\tau} = 0.$$

Por lo tanto primero debemos realizar el diagrama de cuerpo libre para la esfera, que se muestra a continuación



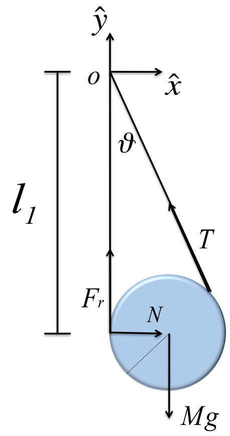
El equilibrio de fuerzas en el eje horizontal implica que,

$$N = T \sin \vartheta$$

y en el eje vertical,

$$T \cos \vartheta + F_{rs} - Mg = 0.$$

Ahora para aplicar la ecuación $\sum \vec{\tau} = 0$, debemos elegir el origen de forma astuta, para ello notemos que la fuerza $\vec{T}$ y $\vec{F}_r$ apuntan hacia el punto O



Al escoger este punto notamos que solo dos fuerzas realizan torque, por lo tanto

$$\sum \vec{\tau}_0 = -MgR\hat{z} + Nl_1\hat{z},$$

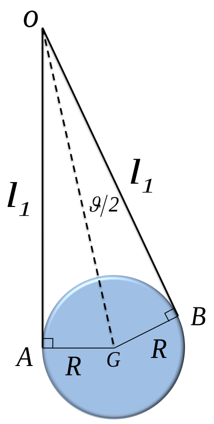
con lo que se obtiene que

$$Nl_1 = MgR$$

Para determinar l_1 utilizamos la semejanza de los triángulos OAG y OBG que se muestran en la figura a continuación, donde

$$\tan \vartheta/2 = \frac{R}{l_1}$$

$$\rightarrow l_1 = R \cot \vartheta/2 = R\,(\csc \vartheta - \cot \vartheta)\,.$$



Con este resultado podemos despejar el valor de la fuerza normal a partir de la ecuación derivada del equilibrio rotacional

$$NR(\csc\vartheta - cot\vartheta) = MgR$$

$$N(\csc\vartheta - cot\vartheta) = Mg$$

Ahora podemos despejar el valor de la tensión ya que $N = T\sin\vartheta$,

$$T = \frac{Mg}{\sin\vartheta(\csc\vartheta - \cot\vartheta)}$$

$$T = \frac{Mg}{(1 - \cos\vartheta)}$$

y con este resultado obtenemos una expresión para la fuerza de roce

$$F_{rs} = Mg - T\cos\vartheta \rightarrow F_{rs} = Mg - \frac{Mg\cos\vartheta}{(1 - \cos\vartheta)},$$

pero sabemos que $F_{rs} \leq \mu N$, por lo tanto

$$Mg - \frac{Mg\cos\vartheta}{(1 - \cos\vartheta)} \leq \mu\frac{Mg}{(\csc\vartheta - \cot\vartheta)}$$

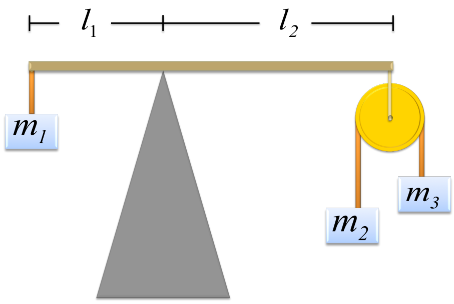
$$(\csc\vartheta - \cot\vartheta)\frac{1 - 2\cos\vartheta}{(1 - \cos\vartheta)} \leq \mu.$$

Finalmente, el coeficiente de roce mínimo está dado por

$$\mu = (\csc\vartheta - \cot\vartheta)\frac{1 - 2\cos\vartheta}{(1 - \cos\vartheta)}.$$

Problema 5.3

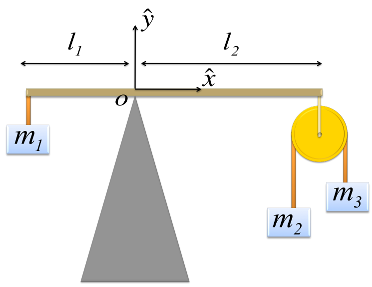
Para el montaje mostrado en la figura encuentre las condiciones sobre l_1, l_2, m_1, m_2, m_3 para que la barra horizontal esté en equilibrio. Considere que $m_2 > m_3$, que la polea carece de fricción y masa, y además desprecie la masa de la barra.



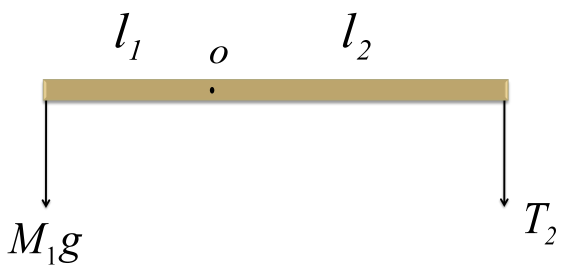
Solución
Para que la barra esté en equilibrio se requiere que

$$\sum \vec{\tau} = \vec{0}.$$

Utilizaremos el pivote $\vec{0}$, que se muestra en la figura siguiente, para el calcular los torques.



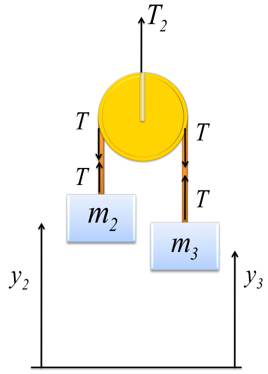
Considerando el siguiente DCL de la barra y aplicando la condición de equilibrio



$$\sum \vec{\tau}_0 = (m_1 g l_1 - T_2 l_2)\,\hat{z} = 0$$

$$\rightarrow m_1 g l_1 = T_2 l_2$$

Para obtener la tensión T_2 consideramos la siguiente sección del montaje,



del cual obtenemos que la condición de equilibrio para la polea entrega que

$$T_2 = T + T = 2T.$$

Además, la segunda ley de Newton para el cuerpo de masa m_2 implica que

$$T - m_2 g = m_2 \ddot{y}_2,$$

y para el cuerpo de masa m_3 se tiene que

$$T - m_3 g = m_3 \ddot{y}_3.$$

Considerando la ecuación de ligadura (el largo de la cuerda es una constante), se obtiene la siguiente relación entre ambas aceleraciones

$$\ddot{y}_2 = -\ddot{y}_3.$$

En base a las tres ecuaciones anteriores, podemos despejar el valor de T

$$T = \frac{2m_2 m_3 g}{m_2 + m_3},$$

y con esto el valor de T_2, ya que

$$T_2 = 2T = \frac{4m_2 m_3 g}{m_2 + m_3}$$

Luego utilizando este resultado y la ecuación obtenida desde la condición de equilibrio rotacional de la barra, se obtiene que

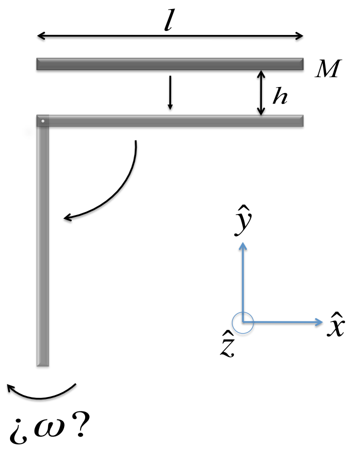
$$m_1 g l_1 = l_2 \frac{4m_2 m_3 g}{m_2 + m_3},$$

y finalmente la condición para el equilibrio es

$$l_1 = \frac{4 l_2 m_2 m_3}{m_1 (m_2 + m_3)}.$$

Problema 5.4

Una barra homogénea de masa M y largo l, inicialmente en posición horizontal, se deja caer desde el reposo libremente. Luego de caer una altura h, uno de sus extremos queda enganchado en un pivote de manera tal que la barra gira en torno a éste. Encuentre la velocidad angular ω de la barra cuando está en posición vertical, tal como se indica en la figura.



Solución

Cuando la barra cae en forma horizontal una altura h, su centro de masa adquiere una velocidad v_{cm}, donde

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$$

$$v_{cm} = \sqrt{2gh}.$$

Justo antes de quedar enganchada en el pivote, el moméntum angular de la barra respecto al pivote está dado por

$$\vec{L}_i = \frac{l}{2}\hat{x} \times \left(-M\sqrt{2gh}\right)\hat{y} = -Ml\sqrt{\frac{gh}{2}}\hat{z}.$$

Considerando que el torque externo respecto al pivote durante el impacto es despreciable (la reacción en el pivote no ejerce torque), el moméntum angular inmediatamente después del impacto está dado por

$$\vec{L}_0 = -I_{z/0}\omega_0\hat{z} = \vec{L}_i,$$

donde el momento de inercia de la barra respecto al pivote es

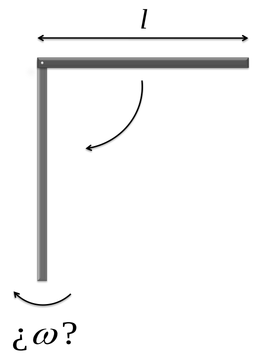
$$I_{z/0} = I_{z/CM} + \frac{1}{2}M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}Ml^2,$$

en donde hemos usado que $I_{z/CM} = \frac{1}{12}ML^2$. Con esto se obtiene que

$$\frac{1}{3}Ml^2\omega_0 = Ml\sqrt{\frac{gh}{2}}$$

$$\rightarrow \omega_0 = \frac{3}{l}\sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

Después del impacto se tiene la siguiente situación



Donde la energía mecánica de la barra justo después del impacto es

$$E_o = \frac{1}{2} I_{z/0}\omega_0^2,$$

y la energía en el momento en que la barra se encuentra en posición vertical es

$$E_f = \frac{1}{2} I_{z/0}\omega_f^2 - Mg\frac{l}{2}.$$

Por conservación de la energía ($E_i = E_f$), se tiene que

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{Mgl}{I_{z/0}}} = \sqrt{\frac{9}{l^2}\frac{gh}{2} + \frac{3g}{l}},$$

y así finalmente obtenemos la velocidad angular de la barra cuando está en posición vertical

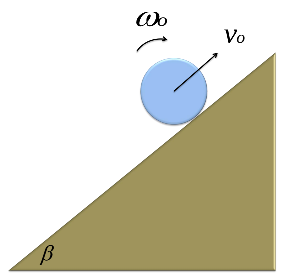
$$\omega_f = \sqrt{\frac{3g}{l}\left(1 + \frac{3h}{2l}\right)}.$$

Problema 5.5

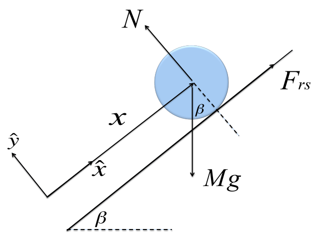
Considere una esfera uniforme rodando sin resbalar y subiendo por una rampa. En el instante $t = 0$, la esfera gira con velocidad angular ω_0 y por lo tanto su centro de masa tiene velocidad v_0 tal como se muestra el la figura.

(a) Encuentre el mínimo coeficiente de roce estático (μ_{s-min}) para evitar el deslizamiento.

(b) Asumiendo $\mu_s > \mu_{s-min}$, encuentre la altura hasta la cual subirá la esfera.



Solución
El diagrama de cuerpo libre para la esfera es el siguiente, donde hemos definido como



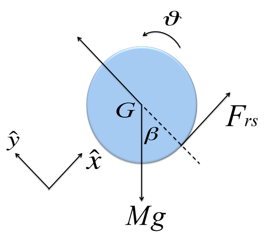
x la coordenada paralela al plano. La segunda ley de Newton indica que en el eje y se debe cumplir que

$$N = Mg\cos\beta,$$

y en el eje x que,

$$F_{rs} - Mg\sin\beta = M\ddot{x},$$

donde F_{rs} es la fuerza de roce estática que actúa sobre la esfera.



Analizando la dinámica rotacional respecto al centro de masa de la esfera, notamos que el peso y la normal no hacen torque, por lo tanto el torque neto será entonces el ejercido por la fuerza de roce

$$\vec{\tau}_G = -R\hat{y} \times F_{rs}\hat{x} = RF_{rs}\hat{z}.$$

Por otro lado, el moméntum angular con respecto al centro de masas es,

$$\vec{L}_G = I_G\dot{\vartheta}\hat{z} = \frac{2}{5}MR^2\dot{\vartheta}\hat{z}.$$

Ahora considerando que la relación entre el torque y el moméntum angular, obtenemos que

$$RF_{rs}\hat{z} = \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \frac{2}{5}MR^2\ddot{\vartheta}\hat{z}$$

$$\rightarrow \ddot{\vartheta} = \frac{5}{2}\frac{F_{rs}}{MR}.$$

La condición de rodar sin resbalar en este caso equivale a

$$\dot{x} = -R\dot{\vartheta}.$$

Notemos que el signo es el correcto ya que si $\dot{\vartheta} > 0$, entonces x decrece. Derivando esta ecuación utilizando el resultado anterior, se obtiene

$$\ddot{x} = -R\ddot{\vartheta} = -R\left(\frac{5}{2}\frac{F_{rs}}{MR}\right)$$

$$\ddot{x} = -\frac{5}{2}\frac{F_{rs}}{M}.$$

Este valor para $\ddot{x}$ lo evaluamos en la ecuación derivada de la segunda ley de Newton que habíamos obtenido y llegamos a que

$$F_{rs} - Mg\sin\beta = -M\frac{5}{2}\frac{F_{rs}}{M}$$

$$F_{rs} = \frac{2}{7}Mg\sin\beta$$

Como la esfera rueda sin resbalar esta fuerza es de roce estático, por lo tanto se debe cumplir la desigualdad

$$F_{rs} \leq \mu_S N,$$

y como $N = Mg\cos\beta$ tenemos,

$$F_{rs} \leq \mu_S Mg\cos\beta$$

$$\rightarrow \frac{2}{7}Mg\sin\beta \leq \mu_S Mg\cos\beta$$

Con esto se obtiene que el mínimo coeficiente de roce estático está dado por

$$\mu_{S-min} = \frac{2}{7}\tan\beta.$$

Note que si μ_S fuera menor al valor obtenido, la desigualdad no se cumpliría, y entonces las ecuaciones serían inconsistentes. Esto físicamente implicaría que la esfera NO estaría rodando sin resbalar.

b) Se encontró anteriormente que

$$\ddot{x} = -\frac{5}{2}\frac{F_{rs}}{M} \quad y \quad F_{rs} = \frac{2}{7}Mg\sin\beta,$$

entonces

$$\ddot{x} = -\frac{5}{7}g\sin\beta.$$

Desde este resultado concluimos que el centro de masa se mueve de forma rectilínea y uniformemente acelerada, por lo tanto su posición en función del tiempo está dada por

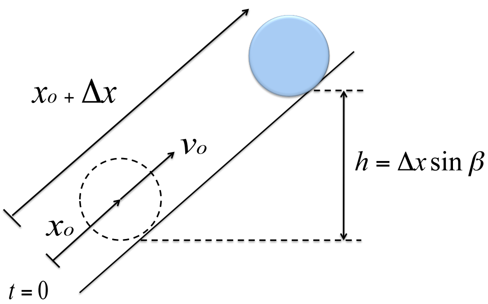
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}\frac{5}{7}g\sin\beta t^2,$$

y su velocidad por,

$$v(t) = v_0 + at$$

$$v(t) = v_0 - \frac{5}{7}g\sin\beta t.$$



Podemos encontrar cuánto avanza el C.M. en x determinando el tiempo que demora en llegar a la altura máxima. Esto ocurre cuando,

$$v(t^*) = 0 = v_0 - \frac{5}{7}g\sin\beta t^*$$

$$t^* = \frac{7}{5}\frac{v_0}{g\sin\beta}.$$

Evaluando este resultado en $x(t)$ se obtiene

$$x(t^*) = x_0 + v_0 t^* - \frac{1}{2}\frac{5}{7}g\sin\beta(t^*)^2$$

$$x(t^*) = x_0 + \frac{7}{10}\frac{v_0^2}{g\sin\beta}.$$

Con lo que se obtiene que

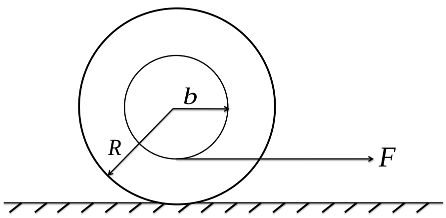
$$\Delta x = \frac{7}{10}\frac{v_0^2}{g\sin\beta},$$

así finalmente la altura hasta la cual subirá la esfera es,

$$h_{max} = \Delta x \sin\beta = \frac{7}{10}\frac{v_0^2}{g}.$$

Problema 5.6

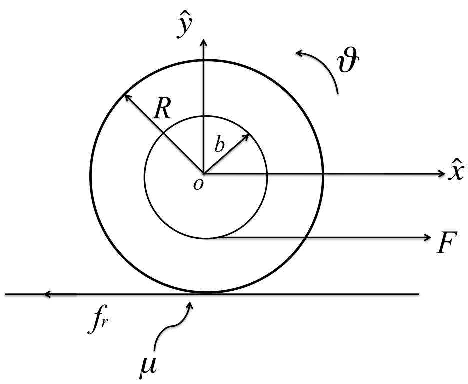
Un yo-yo de masa M y radio externo R, tiene un eje de radio b en donde se enrolla una cuerda. Su momento de inercia con respecto a su centro de masa es $I = \frac{1}{2}MR^2$. El yo-yo es puesto sobre una mesa y se le aplica una fuerza horizontal F como se muestra en la figura. Si el coeficiente de fricción estática entre el yo-yo y la mesa es μ_s, encuentre el máximo valor de la fuerza F para la cual el yo-yo rueda sin resbalar.



Solución

Utilizando la relación entre el torque con respecto al centro de masas del yo-yo y su aceleración angular tenemos que

$$\sum \vec{\tau}_c = \frac{1}{2}MR^2\ddot{\vartheta}\hat{k}.$$



donde

$$\sum \vec{\tau}_c = -b\hat{y} \times F\hat{x} - R\hat{y} \times -f_r\hat{x} = bF\hat{z} - f_rR\hat{z},$$

por lo tanto

$$bF - f_r R = \frac{1}{2} M R^2 \ddot{\vartheta}.$$

Luego de analizar la dinámica de traslación se obtiene que

$$F - f_r = M\ddot{x},$$

y como el yo-yo rueda sin resbalar

$$\ddot{x} = -R\ddot{\vartheta},$$

así obtenemos

$$F - f_r = -RM\ddot{\vartheta}.$$

En base al resultado anterior encontramos que

$$2bF - 2f_r R = Rf_r - RF$$

$$\rightarrow f_r = F\frac{(R + 2b)}{3R}.$$

Como el yo-yo rueda sin resbalar la fuerza de roce es estática, y en el límite justo antes de deslizar debe satisfacer que

$$f_r \leq \mu N$$

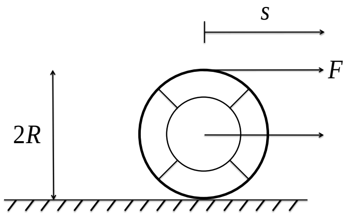
$$\rightarrow F \leq \frac{3R\mu Mg}{R + 2b}.$$

De aquí se obtiene que la fuerza máxima que se puede aplicar es

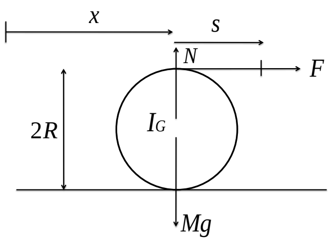
$$F_{max} = \frac{3\mu MgR}{R + 2b}.$$

Problema 5.7

Un cordel largo está enrollado alrededor de una rueda que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal sin roce. El cordel tiene masa despreciable y la rueda tiene masa M, radio R y momento de inercia I_g respecto a su centro de masa. Si el otro extremo de la cuerda es tirado con una fuerza constante F paralela a la superficie horizontal, tal como se muestra en la figura, encuentre el desplazamiento x del centro de masa en función de la cantidad de cuerda s desenrollada.



Solución
Se pide $x(s)$, donde x está referido al centro de masa de la rueda, tal como se muestra en el diagrama de cuerpo libre siguiente



De la segunda ley de Newton obtenemos que

$$F = M\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} = \frac{F}{M}.$$

En base al resultado anterior, y dado que la rueda parte desde el reposo, su posición en función del tiempo está dada por

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2.$$

Por otro lado, el análisis de la dinámica rotacional indica que

$$\vec{\tau}_g = \frac{d\vec{L}_g}{dt}$$

$$\rightarrow \vec{\tau}_g = R\hat{y} \times F\hat{x} = -RF\hat{z}.$$

Luego, si $\vartheta(t)$ mide la rotación en sentido horario, entonces

$$\vec{L}_g = -I_g\dot{\vartheta}\hat{k},$$

lo que junto al resultado anterior no da

$$RF = I_g\alpha$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{FR}{I_g}.$$

Considerando el resultado anterior, tenemos que

$$\vartheta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2,$$

donde el largo desenrollado corresponde a

$$s(t) = \vartheta(t)R = \frac{1}{2}\alpha R t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{FR^2}{I_g}\right)t^2,$$

por lo tanto

$$t^2 = \frac{2I_g s}{FR^2}.$$

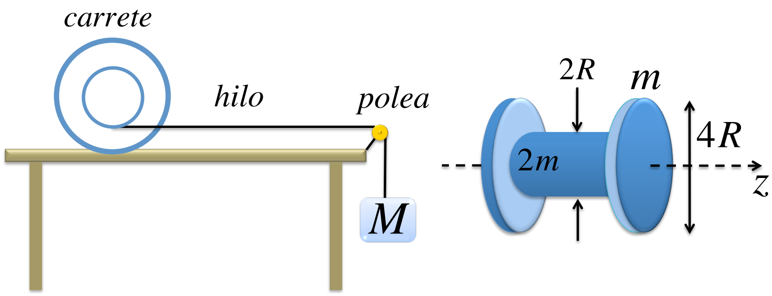
Note que aquí $\ddot{x} \neq \alpha R$. Ahora remplazando t^2 en $x(t)$ se obtiene que

$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{F}{M}\left(\frac{2I_g s}{FR^2}\right)$$

$$x(s) = \left(\frac{I_g}{MR^2}\right)s.$$

Problema 5.8

Una carrete de hilo formado por dos discos y un cilindro, tiene enrollado un hilo que a su vez está atado a un bloque suspendido, tal como se representa en la figura. Considere que el hilo, inextensible y de masa despreciable, se puede desenrollar del carrete sin deslizar y que la polea por la cual pasa es ideal. Encuentre la aceleración del carrete si éste rueda sobre la mesa horizontal sin resbalar.

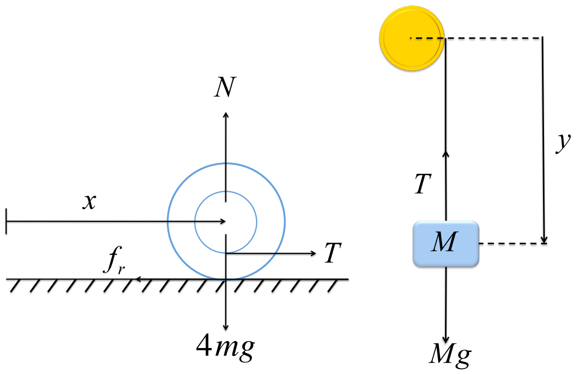


Solución

En la figura siguiente se representan las fuerzas actuando sobre el carrete y el bloque, y las coordenadas ”x” e ”y” que utilizaremos para describir la dinámica del problema.

Comenzaremos analizando el bloque de masa M, para el cual se tiene que

$$Mg - T = M\ddot{y}.$$

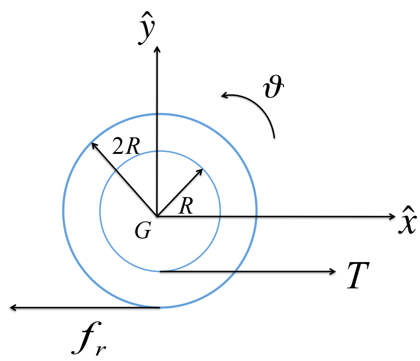


Para el carrete la segunda ley de Newton implica que

$$T - f_r = 4m\ddot{x}$$

$$N = 4mg$$

Para analizar la dinámica de rotación del carrete utilizaremos la siguiente figura



y la ecuación

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I_G \alpha \hat{z},$$

para lo cual debemos calcular el momento de inercia del carrete y el torque neto respecto a G.

El torque neto respecto al centro de masa del carrete (G) está dado por

$$\sum \vec{\tau}_G = 2R(-\hat{y}) \times f_r(-\hat{x}) + R(-\hat{y}) \times T\hat{x}$$

$$\sum \vec{\tau}_G = 2Rf_r(-\hat{z}) + RT\hat{z} = (-2Rf_r + RT)\hat{z}.$$

Para calcular el momento de inercia del carrete, recordamos que el momento de inercia de un cilindro de masa M y radio R con respecto a su eje de simetría que pasa por su centro de masa es $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$. Para este caso tenemos que el momento de inercia con respecto a G será la suma de los momentos de inercia individuales de sus componentes (los dos discos y el cilindro), por lo tanto

$$I_G = \frac{(2m)R^2}{2} + 2\frac{m(2R^2)}{2} = 5mR^2.$$

En base a los cálculos anteriores podemos encontrar que la aceleración angular del disco es

$$-2Rf_r + RT = 5mR^2\alpha.$$

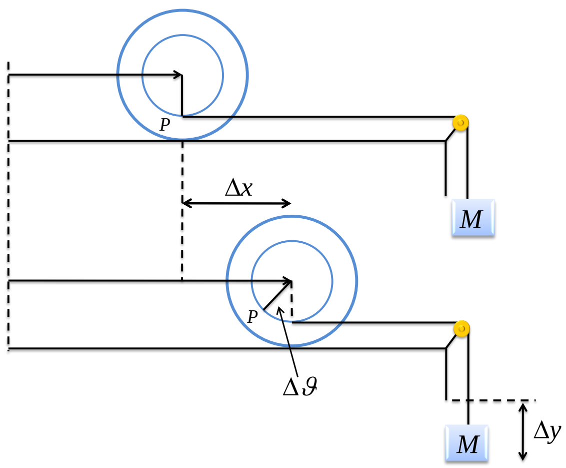
Ahora la condición de rodadura ideal implica que

$$2R\alpha = -\ddot{x},$$

donde el signo proviene al imponer esta condición en consistencia con la definición de las coordenadas.

Por último, podemos relacionar las aceleraciones de la carretilla y la masa M mediante

$$\ddot{x} = \ddot{y} - \alpha R.$$



Resumiendo, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

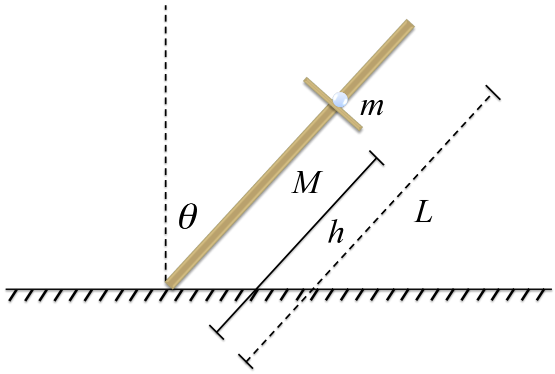
$$Mg - T = M(\ddot{x} + \alpha R)$$
$$T - f_r = 4m\ddot{x}$$
$$-2Rf_r + RT = 5mR^2\alpha$$
$$2R\alpha = -\ddot{x},$$

del que podemos finalmente despejar la aceleración del carrete

$$\ddot{x} = \frac{2Mg}{M + 21m}.$$

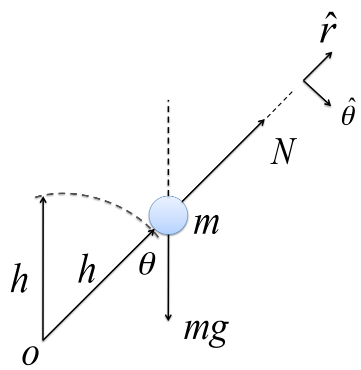
Problema 5.9

Una barra uniforme de largo L y masa M puede girar en torno a un pivote ubicado en uno de sus extremos. Una partícula de masa m ($m << M$) descansa sobre una bandeja de masa despreciable ubicada a una distancia h del pivote, la que está fija a la barra. Inicialmente la barra está en reposo en una posición casi vertical. Encuentre el ángulo ϑ_c cuando la partícula pierde contacto con la bandeja.



Solución

Mientras la masa m permanece en contacto con la barra, describe una trayectoria circular de radio h en torno al extremo inferior de la barra. El diagrama de cuerpo libre para la partícula de masa m para un ϑ arbitrario, con $\vartheta < \vartheta_c$ se presenta en la siguiente figura



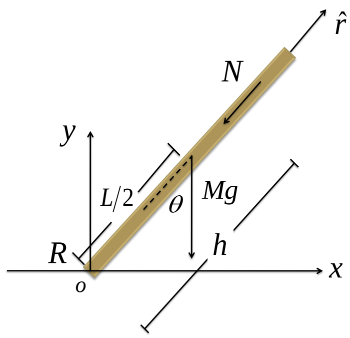
Las fuerzas orientadas en la dirección radial $\hat{r}$ cumplen que

$$N - mg\cos\vartheta = -mh\dot{\vartheta}^2,$$

es decir

$$N(\vartheta, \dot{\vartheta}) = mg\cos\vartheta - mh\dot{\vartheta}^2.$$

Tenemos una expresión para la normal entre la masa m y la barra como función del ángulo ϑ y su derivada. Nos gustaría encontrar un ángulo ϑ_c tal que esta expresión sea cero. Para ello, veamos el diagrama de cuerpo libre para la barra



La fuerza de reacción $\vec{R}$ es ejercida por el pivote sobre la barra en el punto O. Tomando a O como origen se tiene que

$$\sum \tau_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt},$$

donde el torque total con respecto al origen está dado por

$$\sum \tau_0 = \left(\vec{0} \times \vec{R}\right) + \left(\frac{L}{2}\hat{r} \times -Mg\hat{j}\right) + (h\hat{r} \times -N\hat{r}) = \frac{L}{2}\hat{r} \times -Mg\hat{j}$$

$$\sum \tau_0 = \frac{L}{2}\hat{r} \times -Mg\hat{j} = \frac{L}{2}\left(\sin\vartheta\hat{i} + \cos\vartheta\hat{j}\right) \times -Mg\hat{j} = -\frac{L}{2}Mg\sin\vartheta\hat{k}.$$

Por otro lado, el moméntum angular de la barra con respecto a O está dado por

$$\vec{L} = I_z\omega\hat{k} = -I_z\dot{\vartheta}\hat{k}.$$

Notar aquí la importancia del signo, pues $\dot{\vartheta} > 0$ denota un giro horario. Con esto se obtiene que

$$-Mg\sin\vartheta\hat{k} = -I_z\ddot{\vartheta}\hat{k}.$$

El momento de inercia de la barra con respecto al eje z puede ser obtenido mediante el **teorema de Steiner**, dado que el momento de inercia con respecto a un eje paralelo a z y que pasa por su centro de masa es

$$I_z^{CM} = \frac{1}{12}ML^2,$$

por lo tanto

$$I_z = I_z^{CM} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2.$$

Remplazando se obtiene

$$\frac{L}{2}Mg\sin\vartheta = \frac{1}{3}ML^2\ddot{\vartheta}$$

$$\ddot{\vartheta} = \frac{3}{2}\frac{g\sin\vartheta}{L}.$$

La relación anterior la podemos escribir de la siguiente manera (con $\dot{\vartheta} \neq 0$)

$$\ddot{\vartheta}\dot{\vartheta} = \frac{3}{2}\frac{g \sin\vartheta}{L}\dot{\vartheta}.$$

De inmediato reconocemos las siguientes derivadas

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{3}{2}\frac{g\cos\vartheta}{L}\right),$$

y como ambas funciones tienen la misma derivada, ellas sólo difieren por una constante

$$\frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 = -\frac{3}{2}\frac{g\cos\vartheta}{L} + C.$$

Ahora para encontrar C evaluamos esta expresión para $t = 0$, en donde $\vartheta(0) = 0$, $\dot{\vartheta}(0) = 0$

$$0 = -\frac{3}{2}\frac{g}{L} + C \rightarrow C = \frac{3}{2}\frac{g}{L},$$

luego

$$\frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{L}(1 - \cos\vartheta)$$

$$\dot{\vartheta}^2 = \frac{3g}{L}(1 - \cos\vartheta).$$

Ahora escribimos N en función de ϑ

$$N(\vartheta) = mg\cos\vartheta - mh\dot{\vartheta}^2$$

$$N(\vartheta) = mg\cos\vartheta - \frac{3mgh}{L}(1 - \cos\vartheta)$$

$$N(\vartheta) = mg\left(1 + \frac{3h}{L}\right)\cos\vartheta - \frac{3mgh}{L}.$$

Finalmente podemos ver cuando la normal se anula

$$mg\left(1 + \frac{3h}{L}\right)\cos\vartheta_c - \frac{3mgh}{L} = 0$$

$$\rightarrow \cos\vartheta_c = \frac{3h}{L + 3h}.$$

A
Vectores

Como se puede ver a lo largo de este libro, en mecánica clásica usamos muchas veces cantidades físicas que necesariamente tienen asociada una dirección. Por ejemplo, si decimos que la piedra que lanza una persona sale de su mano con cierta “velocidad”, inmediatamente nos damos cuenta que es muy importante saber en qué dirección salió disparada. Es decir, para tener una buena descripción matemática de lo que está ocurriendo, naturalmente debemos asociar a la velocidad una cantidad que no sólo nos revele su magnitud, sino que también especifique su dirección. Otras cantidades físicas que naturalmente deben tener asociada una dirección son, por ejemplo, el desplazamiento de un objeto o una fuerza que actua sobre él. Veremos que los objetos matemáticos que cumplen con este objetivo son los llamados *vectores*.

Definición de un vector A.1

Desde el punto de vista geométrico un vector se puede definir como un segmento de línea direccionado. Para describirlo debemos especificar tanto su longitud como su dirección. Para denotar que una cierta variable es un vector pondremos una flecha sobre su símbolo. Por ejemplo, el vector “A” lo escribimos $\vec{A}$. En general, supondremos que el desplazamiento paralelo no cambia el vector. Si dos vectores tienen la misma magnitud y dirección entonces son iguales. En la Fig. A.1 se muestran dos vectores idénticos $\vec{A} = \vec{B}$.

A la longitud del vector la llamamos *magnitud* y la escribimos como $|\vec{A}|$ o sencillamente A. A un vector con magnitud uno lo llamamos *vector unitario* y se le etiqueta

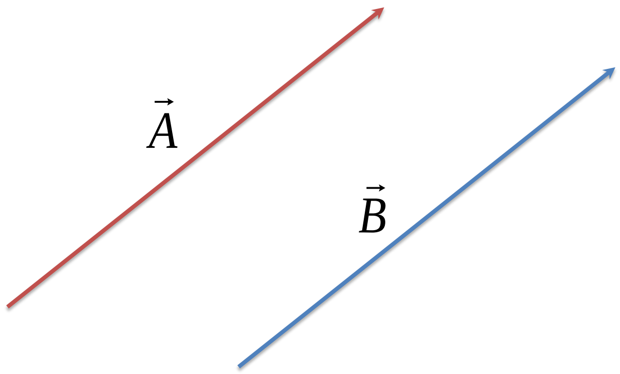


Figura A.1: El desplazamiento paralelo no cambia un vector. En la figura vemos $\vec{A} = \vec{B}$.

con un "sombrero"; el vector unitario paralelo a $\vec{A}$ es $\hat{A}$. Tenemos entonces que,

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \quad \text{ó} \quad \vec{A} = |\vec{A}|\hat{A}. \tag{A.1}$$

Algebra de vectores — A.2

Multiplicación por un escalar — A.2.1

Si multiplicamos un vector $\vec{A}$ por un número real b el resultado es un nuevo vector $\vec{C} = b\vec{A}$. La magnitud del vector resultante es $\vec{C} = |b||\vec{A}|$. Si b es positivo la dirección de $\vec{C}$ es la misma que la de $\vec{A}$, mientras que si b es negativo la dirección de $\vec{C}$ tiene el sentido opuesto a la dirección de $\vec{A}$.

Adición de vectores — A.2.2

Es sencillo entender geométricamente la operación de adición de vectores $\vec{A} + \vec{B}$: ubicamos la cola de B sobre la punta de A y el resultado de la suma es el vector que va desde la cola de A hasta la punta de B (ver Fig. A.2a). La resta de vectores se puede pensar también como una suma ya que $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$ (ver Fig. A.2b).

No es difícil demostrar las siguientes propiedades:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \quad \text{Conmutativa} \tag{A.2}$$

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} \quad \text{y} \quad c(d\vec{A}) = (cd)\vec{A} \quad \text{Asociativa} \tag{A.3}$$

$$(c + d)\vec{A} = c\vec{A} + d\vec{A} \quad \text{y} \quad c(\vec{A} + \vec{B}) = c\vec{A} + c\vec{B} \quad \text{Distributiva} \tag{A.4}$$

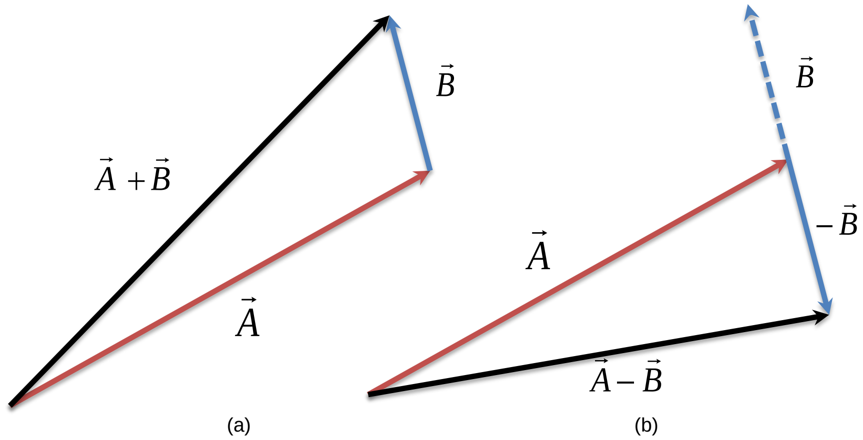


Figura A.2: La adición de vectores se define geométricamente como se ve en (a). La resta de vectores también se puede pensar en términos de una suma como se ilustra en (b).

Habiendo definido multiplicación por un escalar y adición de vectores nos preguntamos, ¿cuál es la manera apropiada de "multiplicar" vectores entre si? Definiremos dos tipos de productos de vectores que son útiles en física.

Producto escalar (o producto "punto") A.2.3

Este producto se llama así porque produce un escalar a partir de dos vectores. Lo denotamos como $\vec{A}\cdot\vec{B}$ y se define como,

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\equiv|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta, \tag{A.5}$$

donde θ es el ángulo que subtienden los vectores al dibujarlos cola con cola como se ve el la Fig. A.3. A partir de esta definición es fácil notar que $\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|\times$(proyección de $\vec{B}$ en $\vec{A}$) ó equivalentemente $\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{B}|\times$(proyección de $\vec{A}$ en $\vec{B}$). Además, si dos vectores son perpendiculares su producto escalar es cero y $\vec{A}\cdot\vec{A}=|\vec{A}|^2$.

Producto vectorial (o producto "cruz") A.2.4

A diferencia del producto escalar, este producto da como resultado un vector y lo denotamos como,

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}. \tag{A.6}$$

Para definirlo debemos especificar tanto la magnitud como la dirección de $\vec{C}$. La magnitud se define como

$$|\vec{C}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta, \tag{A.7}$$

donde θ es el ángulo (menor que π) que subtienden $\vec{A}$ y $\vec{B}$ al ser dibujados cola con cola. Notamos inmediatamente que este producto será nulo cuando $\theta=0$ ó π.

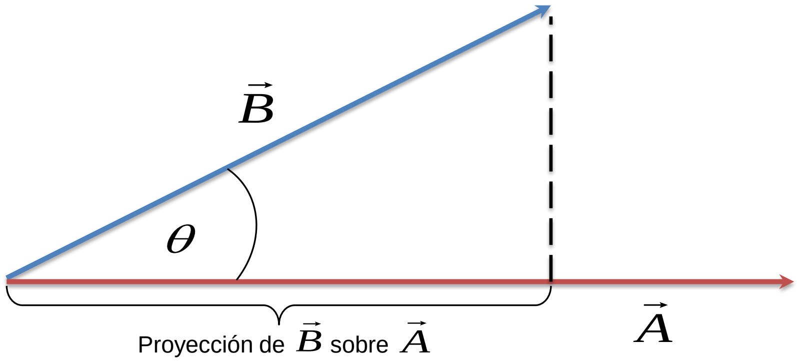


Figura A.3: Tanto las magnitudes de los vectores como el ángulo que subtienden son importantes en la definición del producto escalar.

Al dibujar $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cola con cola vemos que estos dos vectores definen un plano. La dirección de $\vec{C}$ está definida como perpendicular a este plano. Dado que existen dos direcciones opuestas perpendiculares al plano, usamos la llamada "regla de la mano derecha" para definir cual es exactamente la del producto $\vec{A} \times \vec{B}$. Nos imaginamos que tenemos nuestra mano derecha abierta con el índice apuntando en la dirección del vector $\vec{A}$ y el pulgar perpendicular a éste último. Luego, cerramos nuestra mano (sin incluir el pulgar) hacia la dirección de $\vec{B}$. La dirección de $\vec{C}$ es la dirección en que apunta nuestro pulgar (ver Fig. A.4).

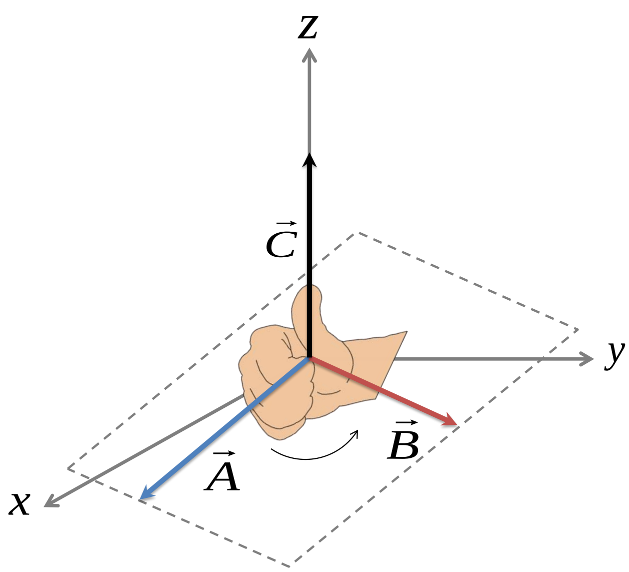


Figura A.4: La dirección del vector $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ es perpendicular al plano que definen $\vec{A}$ y $\vec{B}$ al ser dibujados cola con cola. Para determinar la orientación exacta de $\vec{C}$ debemos usar la "regla de la mano derecha".

Vectores base y las componentes de un vector A.2.5

Los vectores base son un conjunto de vectores unitarios ortogonales (perpendiculares), uno para cada dimensión del espacio. Por ejemplo, si consideramos un sistema de coordenadas cartesiano podemos tomar los vectores base $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ orientados en las direcciones a cada uno de los ejes correspondientes, como se muestra en la Fig. A.5. No es difícil demostrar las siguientes propiedades de estos vectores:

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \quad (A.8)$$
$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0 \quad (A.9)$$
$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \quad (A.10)$$
$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} \quad (A.11)$$
$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} \quad (A.12)$$

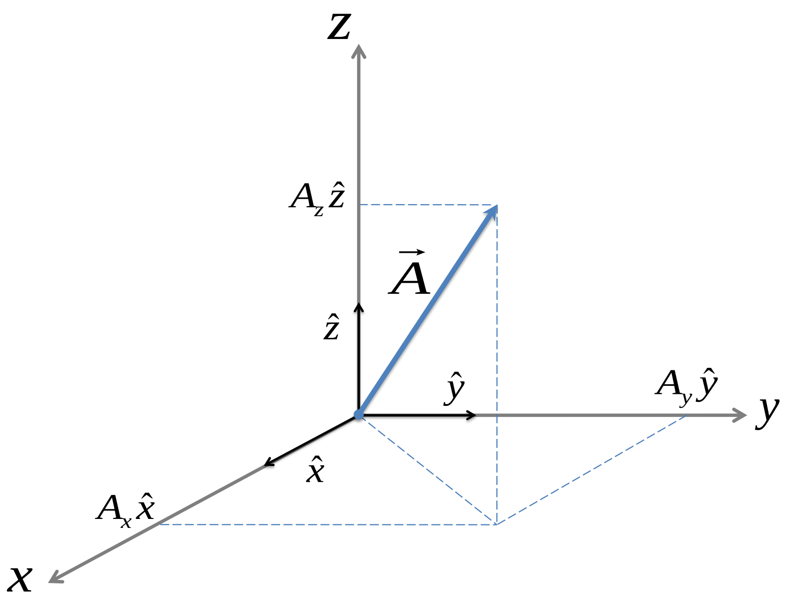


Figura A.5: Los vectores base se pueden escoger orientados en las direcciones de los ejes cartesianos. El vector $\vec{A}$ se puede expresar como la suma de sus componentes en cada una de estas direcciones.

Cualquier vector se puede escribir ahora en términos de estos vectores base en la forma,

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}. \quad (A.13)$$

A los números A_x, A_y y A_z los llamamos las componentes del vector $\vec{A}$. Otra forma de escribir el mismo vector es,

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z). \quad (A.14)$$

En la Fig. A.5 vemos cómo $\vec{A}$ corresponde a la suma de sus componentes en las tres direcciones de los ejes cartesianos. Las mismas consideraciones son validas para un vector en dos dimensiones, con la única diferencia que en ese caso sólo es necesario usar dos componentes en vez de tres.

De lo anterior se desprende directamente que si queremos encontrar una componente de un vector sólo debemos hacer un producto punto con el vector unitario en la dirección correspondiente. Por ejemplo,

$$A_x = \vec{A} \cdot \hat{x}. \tag{A.15}$$

Además, usando las propiedades de los vectores base vemos que el producto escalar queda,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}) \cdot (B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \tag{A.16}$$

Usando nuevamente las propiedades de los vectores base podemos encontrar el producto cruz en términos de las componentes de los vectores,

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}) \times (B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}) \\ &= \hat{x}(A_yB_z - A_zB_y) - \hat{y}(A_xB_z - A_zB_x) + \hat{z}(A_xB_y - A_yB_x). \end{aligned} \tag{A.17}$$

Una manera de escribir esto último de una manera mas corta y fácil de memorizar es como el determinante de una matriz,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{A.18}$$

B

Solución a los ENTENDISTEST

Capítulo 1 B.1

¿ENTENDISTEST? 1.1

En cuál de las zonas definidas como I, II y III en la figura 1.3, el móvil tiene una mayor velocidad instantánea?

Solución: Para responder a esta pregunta hay que recordar que la derivada de una función en un punto equivale a la pendiente de la función en dicho punto (hay que imaginar una recta tangente a la función, luego la pendiente de esta recta será igual a la derivada). De la figura 1.3 vemos que es en la zona III donde la pendiente de la función es más grande, y por lo tanto es en esta zona donde la velocidad instantánea es mayor.

¿ENTENDISTEST? 1.2

Considere dos sistemas de referencia que se mueven a una velocidad relativa v_0 respecto a un eje x. Vimos que la velocidad de un objeto no será la misma en ambos sistemas de referencia: ¿Qué ocurre con la aceleración? ¿Depende también del sistema de referencia?

Solución: La aceleración de un objeto depende únicamente de la variación de la velocidad en función del tiempo, pero no del valor de la velocidad. La aceleración entonces no depende del sistema de referencia.

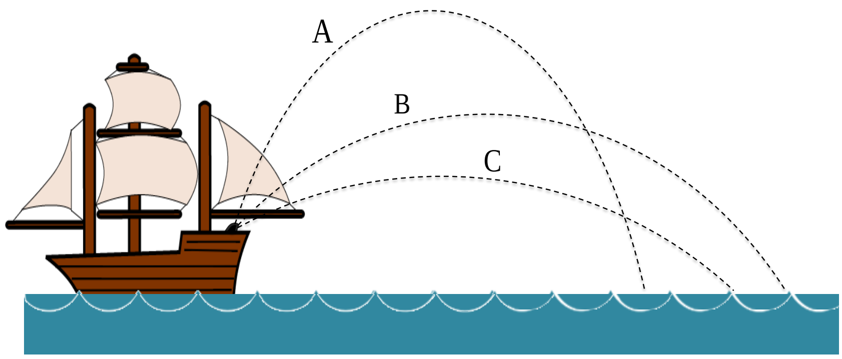
¿ENTENDISTEST? 1.3

Usualmente nos referimos al medidor de velocidad de un auto como velocímetro. ¿Según los conceptos definidos hasta aquí, es realmente un medidor de velocidad? ¿Es adecuado llamarlo velocímetro?

Solución: El velocímetro de un automóvil es en realidad un medidor de la rapidez de éste (entrega únicamente el módulo de la velocidad), y no de su velocidad, ya que esta última siempre depende del sistema de referencia respecto al cual se mide. Dos autos pueden moverse con la misma rapidez por una autopista pero en direcciones opuestas, sin embargo, el velocímetro de ambos marcará el mismo valor.

¿ENTENDISTEST? 1.4

Con el propósito de calibrar un cañón de corto alcance ubicado en una fragata, se realizan tres disparos registrándose las trayectorias A, B y C mostradas en la figura. ¿En cuál de estos disparos el proyectil tarda menos tiempo en impactar la superficie del mar?



Solución: El tiempo que demora el proyectil en caer es directamente proporcional a la altura máxima alcanzada por éste, por lo que la trayectoria *C* es aquella que demora menos tiempo en impactar el mar.

Capítulo 2 B.2

¿ENTENDISTEST? 2.1

¿Si una máquina de Atwood es ubicada en un ascensor que desciende con aceleración igual a g, cual será el valor de la tensión de la cuerda?

Solución: Un asensor que desciende con aceleración g equivale a un ascensor en caída libre bajo la acción de la gravedad. Intuitivamente, la gravedad tiende a hacer caer los bloques con aceleración $-g$, pero todo el conjunto (asensor, polea, cuerda) cae con esta misma aceleración. Es por esto que desde el punto de visa de un observador que se encuentra dentro del asensor, todo ocurre como si no existiera la gravedad.

Para demostrar esto a partir de las ecuaciones de movimiento, notemos que la aceleración del bloque M_1 puede ser escrita como $a-g$, donde $-g$ es la aceleración debida a la caída libre del sistema, y a representa la aceleración del bloque respecto al piso del asensor. La segunda ley de Newton para este bloque nos da

$$T - M_1 g = M_1(a-g) \quad \rightarrow T = M_1 a$$

De igual forma, para el bloque 2:

$$M_2 g - T = M_2(a+g) \quad \rightarrow T = -M_2 a$$

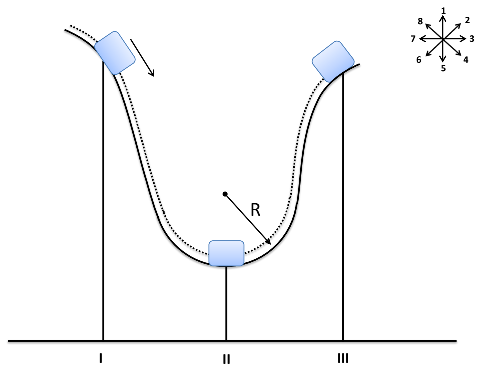
Ambas ecuaciones implican $M_1 a = -M_2 a$, cuya única solución posible es $a = 0$, y luego la tensión de la cuerda es nula. Es decir, la aceleración de los bloques respecto al piso del asensor es nula, lo mismo que se obtendría dentro de un asensor en reposo si $g = 0$.

De forma general, dentro de un sistema en caída libre todo ocurre como si la gravedad no existiera. Este es el principio de los aviones en caída libre utilizados por los astronautas para simular la ingravidez.

¿ENTENDISTEST? 2.2

¿Cuál de las flechas del diagrama representa mejor la dirección de la aceleración cuando el bloque pasa por la posición II?

Solución: En la posición II, las únicas fuerzas que actúan sobre el bloque son el peso y la normal, ambas en la dirección vertical, dado que el roce es despreciable, por lo tanto la aceleración estará en esta dirección. Además, dado que justo después de



pasar por II el bloque sube, la aceleración debe ser en el sentido indicado por la flecha 1. Esto también indica que la fuerza normal es mayor al peso.

Capítulo 3 B.3

¿ENTENDISTEST? 3.1

Considere un vagón de tren que se desplaza con velocidad constante $\vec{V}$ por una vía completamente horizontal, el cuál traslada una caja de masa M, como se muestra en la Fig. 3.5. ¿En esta situación, cuánto trabajo realiza el vagón sobre la caja en un intervalo de tiempo Δt?

Solución: El trabajo que realiza el vagón sobre la caja es cero, ya que la fuerza que el vagón ejerce sobre la caja es cero. Esto último es debido a que la velocidad de ambos es constante.

¿ENTENDISTEST? 3.2

Considere un anillo de masa M que puede deslizar sin roce por una guía de alambre semicircular de radio R. El anillo a su vez está unido a un resorte de masa despreciable y constante elástica k, que está pivotado en su extremo como se muestra en la Fig. 3.9. ¿Si en cierto instante el anillo se suelta desde el reposo en el punto A, cual es el valor de su energía cinética cuando para por el punto B?

Solución: Debido a que el anillo desliza sin roce, el sistema es conservativo. Luego, dado que el resorte no cambia su estado de energía cuando el anillo se mueve desde el punto A al punto B, el cambio de energía cinética es justamente el cambio de energía potencial mgR. Por lo tanto la velocidad del anillo en B, considerando que el anillo en A parte del reposo, es $\sqrt{2gR}$

Capítulo 4 B.4

¿ENTENDISTEST? 4.1

Considere dos partículas de masa m que se mueven inicialmente a lo largo de una misma línea recta, ambas con rapidez v pero en direcciones opuestas. Si en cierto instante estas partículas chocan y quedan pegadas, ¿con qué velocidad se mueven después de la colisión?

Solución: Después del choque ambas partículas quedan pegadas y en reposo. Dado que no actúan fuerzas externas sobre el sistema el moméntum total de éste se conserva. Luego, considerando que ambas partículas quedan pegadas después del choque y por ende moviéndose con la misma velocidad, la conservación del moméntum implica que ambas queden en reposo después de la colisión ya que el momentum debe permanecer constante e igual a cero (valor del momentum del sistema antes de la colisión).

¿ENTENDISTEST? 4.2

Considere dos partículas de masa m que se desplazan a lo largo de una misma línea recta. ¿Con qué velocidad se mueve el centro de masas en los siguientes dos casos?

(a)Ambas partículas se mueven con velocidad $\vec{v}$.

(b)Una de ellas se mueve con velocidad $\vec{v}$ y la otra con velocidad $-\vec{v}$.

Solución: En el caso (a) el centro de masas se mueve con la misma velocidad $\vec{v}$ de las partículas y en el caso (b) la velocidad del centro de masas es cero.

Capítulo 5 B.5

¿ENTENDISTEST? 5.1

Considere nuevamente el caso mostrado en la Fig. 5.4. ¿En qué dirección deberían ser aplicadas las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ para que el moméntum angular del sistema permanezca constante?

Solución: Para que el moméntum angular del sistema permanezca constante, el torque neto producido por este par de fuerzas debe ser cero. Para que esto se cumpla, las fuerzas deben ser aplicadas en la dirección del eje de la barra.

¿ENTENDISTEST? 5.2

Considere nuevamente el caso presentado en la Fig. 5.5. Si usted quisiera cortar el alambre aplicando la menor fuerza posible, ¿dónde aplicaría esta fuerza? ¿Que modificación le realizaría usted a esta herramienta para disminuir aún más la fuerza requerida para cortar el alambre?

Solución: Para aplicar la menor fuerza posible, se debería modificar el punto de aplicación de ésta, de manera tal de que pueda ser aplicada justo en el extremo del alicate, o sea, en $x = L$.

Para disminuir aún más la fuerza requerida para cortar el alambre, se puede introducir una modificación tal que haga que la distancia d disminuya lo más posible. Esto significa que la zona de corte del alicate quede lo más cercana posible al pivote (punto P).

¿ENTENDISTEST? 5.3

En la Fig. 5.8 se presenta el valor del momento de inercia de una esfera maciza de masa M y radio R respecto a un eje que pasa por su centro de masa. Si ahora consideramos un cascarón esférico de masa M y radio R, ¿el momento de inercia respecto a su centro de masa, sería mayor o menor que el de la esfera maciza?

Solución: Será mayor, ya que en el caso del cascarón esférico, un mayor porcentaje de su masa está a una distancia mayor del eje en cuestión.