Nivelación Física ⋆ Problemas Resueltos

Vectores y Trigonometría

Dirección de Pregrado, Ingeniería UC

Coordinación: Sebastián Urrutia Quiroga
Ayudante: Catalina Ortega del Río
Revisor: Francisco Eterovic Barra

Introducción

El presente texto corresponde al trabajo realizado por el Equipo de Nivelación de Física durante el primer semestre de 2017. Con el apoyo de la Dirección de Pregrado de la Escuela de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica de Chile, este equipo recopiló y resolvió diversos problemas en cuatro tópicos introductorios al curso *Estática y Dinámica*.

La selección de los problemas tienen como objeto facilitar la adaptación de los alumnos a la física de nivel universitario. El orden de los mismos es incremental en dificultad, de acuerdo al criterio del ayudante que elaboró este documento. En el final del mismo se pueden encontrar las fuentes de donde provienen los problemas e imágenes utilizados en la elaboración de este compilado.

Esperamos que este conjunto de problemas resulte de utilidad para los alumnos, y que contribuya a su proceso educativo en el primer curso de física durante su formación como Ingenieros. Cualquier comentario, favor comunicarse con la Dirección de Pregrado para canalizar las inquietudes a quien corresponda.

Equipo de Nivelación
Primer Semestre de 2017

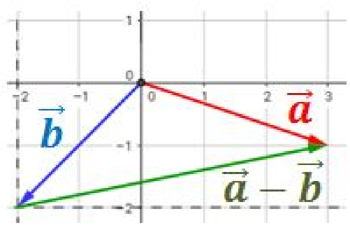
Problema 1.

Se tienen los vectores $\vec{a} = (3, -1)$, $\vec{b} = (-2, -2)$, $\vec{c} = (-3, -1)$. Se le pide calcular:

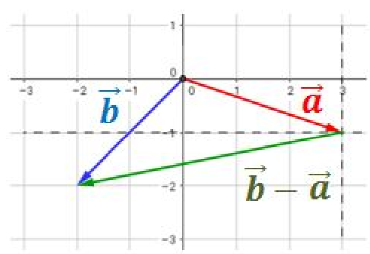
1. $\vec{a} - \vec{b}$
2. $\vec{b} - \vec{a}$
3. $\vec{a} + \vec{c}$

Solución:

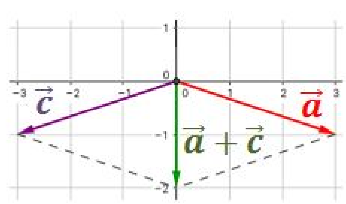
$$\vec{a} - \vec{b} = (3, -1) - (-2, -2) = (5, 1)$$



$$\vec{b} - \vec{a} = (-2, -2) - (3, -1) = (-5, -1)$$



$$\vec{a} + \vec{c} = (3, -1) + (-3, -1) = (0, -2)$$



Problema 2.

Sabiendo que $cos(a) = \dfrac{1}{4}$ y que $270° < a < 360°$calcule las demás razones trigonométricas.

Solución:

Imediatamente podemos calcular la secante, esta viene dada por el recíproco del coseno

$$\sec(a) = 4$$

De la ecuación $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$ despejamos el valor de $\sin(a)$

$$\sin(a) = -\sqrt{1 - \frac{1^2}{4^2}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Notamos que $cos(a)$ es positivo y $sin(a)$ es negativo porque nos ubicamos en el cuarto cuadrante.

Luego, el recíproco del seno corresponde a la cosecante

$$\text{cosec}(a) = -\frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$$

Y la tangente es el cuociente entre el seno y el coseno

$$\tan(a) = -\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = -\sqrt{15}$$

Y la cotangente es el recíproco de la tangente

$$\cot(a) = -\frac{1}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15}$$

Problema 3.
Exprese el vector $\vec{m} = (1, 2, 3)$ como una combinación lineal de $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (0, 1, 1)$.

Solución:

$$(1, 2, 3) = x(1, 0, 1) + y(1, 1, 0) + z(0, 1, 1)$$

$$(1, 2, 3) = (x + y, y + z, x + z)$$

Nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + y = 1$$
$$y + z = 2$$
$$x + z = 3$$

Resolviendo llegamos a:

$$x = 1, y = 0, z = 2$$

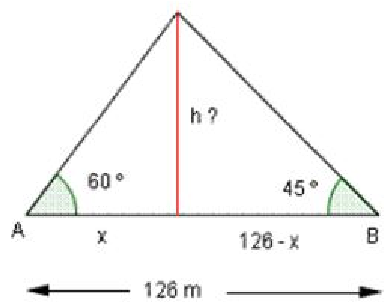
Finalmente,

$$\vec{m} = \vec{u} + 2\vec{w}$$

Problema 4.
Juán y Pedro ven desde las puertas de sus casa una torre, bajo ángulos de 45° y 60°. La distancia entre sus casas es de 126 m y la torre está situada entre sus casas. Halla la altura de la torre.

Solución:

Para resolver el problema hacemos un dibujo con los datos, en donde h es la altura de la torre y x es la distancia de uno de los observadores al pie de la torre.



Notamos que al trazar la altura de la torre se forman dos triángulos rectángulos.

Planteamos las siguientes ecuaciones:

$$\operatorname{tg}(45°) = \frac{h}{126 - x} \quad \longrightarrow \quad h = (126 - x)\operatorname{tg}(45°)$$

$$\operatorname{tg}(60°) = \frac{h}{x} \quad \longrightarrow \quad h = x\operatorname{tg}(60°)$$

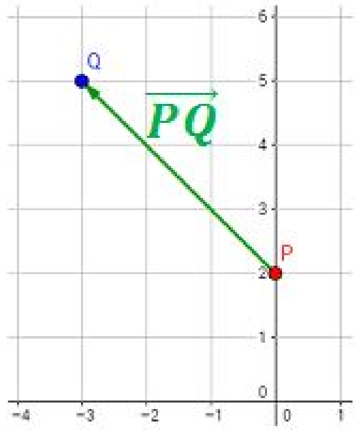
Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas. Se resuelve y se obtiene:

$$x = 46,15m$$
$$h = 79,83m$$

Problema 5.
Sean los puntos $P = (0, 2)$ y $Q = (-3, 5)$. Encuentre el vector que va de P a Q y el vector que va de Q a P.

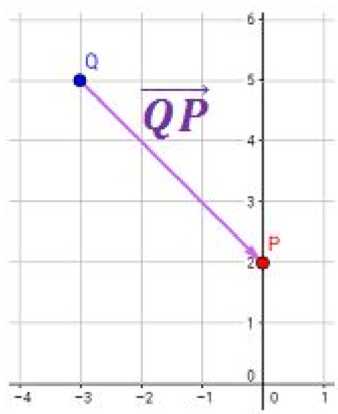
Solución:
El vector que va de P a Q es $\overrightarrow{PQ}$ y se calcula como:

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-3 - 0, 5 - 2) = (-3, 3)$



El vector que va de Q a P es $\overrightarrow{QP}$ y se calcula como:

$$\overrightarrow{QP} = P - Q = (0+3, 2-5) = (3, -3)$$



Problema 6.
Convierta los siguientes valores de radianes a grados sexagesimales

1) 3 rad

2) $\dfrac{2\pi}{5}$ rad

3) $\dfrac{3\pi}{10}$ rad

Solución:

Tenemos que entender que π rad=180°, con esto utilizamos la regla de tres para calcular el valor equivalente α en grados sexagesimales

1) 3 rad

$$\frac{\pi}{3} = \frac{180°}{\alpha} \quad \longrightarrow \quad \alpha = 171,877°$$

2) $\dfrac{2\pi}{5}$ rad

$$\frac{2\pi}{5} = \frac{2 \times 180°}{5} \quad \longrightarrow \quad \alpha = 72°$$

3) $\dfrac{3\pi}{10}$ rad

$$\frac{3\pi}{10} = \frac{3 \times 180°}{10} \quad \longrightarrow \quad \alpha = 54°$$

Problema 7.
Demuestre que los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (0, 1, 1)$ son linealmente independientes.

Solución:

Para demostrar lo pedido planteamos la siguiente ecuación:

$$(0, 0, 0) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, 1, 1)$$

Nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a + b = 0$$
$$b + c = 0$$
$$a + c = 0$$

La única solución que existe es la trivial:

$$a = 0, b = 0, c = 0$$

Por lo tanto, los vectores son linealmente independientes.

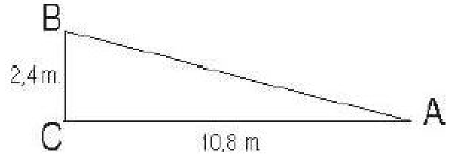
Problema 8.
El ancho de una arco de fútbol es de 4 m y su altura 2,4 m. Para lanzar un penal la pelota se sitúa a 10,8 m de la portería y a igual distancia de los postes.

a) Calcule el ángulo máximo de elevación que puede llevar la pelota para que pase por debajo del larguero.

b) Calcule el ángulo máximo barrido horizontalmente para poder meter gol (la pelota pasa entre los postes).

Solución:

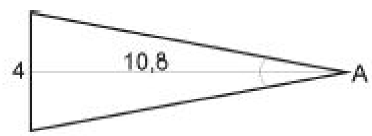
a) La situación puede representarse mediante un triángulo rectángulo en donde BC es la altura del arco y AC la distancia a la cual se lanza el penal.



Lo que se nos pide se traduce en calcular el ángulo A. Luego,

$$\text{tg}(A) = \frac{BC}{AC} = \frac{2,4}{10,8} = 0,222 \quad \longrightarrow \quad A = 12,53°$$

b) Nuevamente podemos representar el problema gráficamente, considerando el ancho del arco y el punto A del cual se lanza el penal.



Se nos pide calcular el ángulo A. Dividimos el triángulo en su mitad por dos triángulos rectángulos iguales. Luego, la razón trigonométrica de la tangente nos indica:

$$\text{tg}\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{2}{10,8} \quad \longrightarrow \quad \frac{A}{2} = 10,49° \quad \longrightarrow \quad A = 20,98°$$

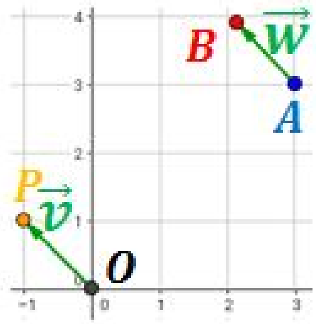
Problema 9.
Dados los puntos $O = (0,0)$, $P = (-1,1)$, $A = (3,3)$ y $B = (2,4)$ calcule el vector $\vec{v}$ que va de O a P y el vector $\vec{w}$ que va de A a B. Explique la relación entre ambos vectores.

Solución:

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} = P - O = (-1,1) - (0,0) = (-1,1)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,4) - (3,3) = (-1,1)$$

La relación entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es que son el mismo vector ubicado en distintos puntos del plano. Es decir, son el mismo vector desplazamiento ya que ambos se miden desde el origen.



Problema 10.
Transforme los siguientes valores en grados sexagesimales a radianes

1) 316°
2) 10°
3) 127°

Solución:

Tenemos que entender que π rad=180°, con esto utilizamos la regla de tres para calcular el valor equivalente α en radianes

1) 316°

$$\frac{\pi}{\alpha} = \frac{180}{316} \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{79\pi}{45} \text{ rad}$$

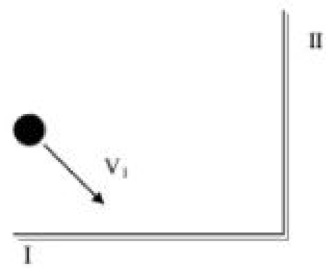
2) 10°

$$\frac{\pi}{\alpha} = \frac{180}{10} \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{18} \text{ rad}$$

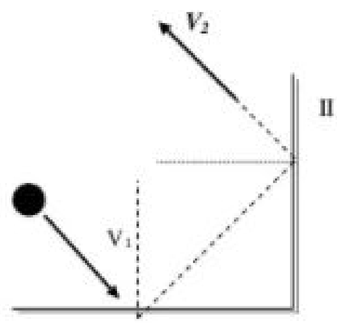
3) 127°

$$\frac{\pi}{\alpha} = \frac{180}{127} \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{127\pi}{180} \text{ rad}$$

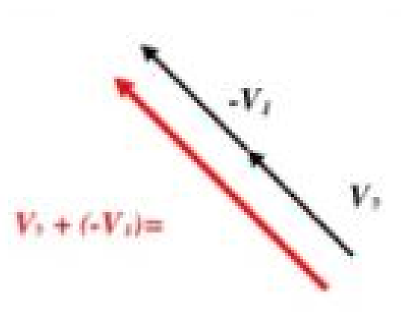
Problema 11.
Se sabe que el ángulo con el que la pelota rebota en la pared es el mismo con el que incide. Determine la dirección y sentido de la resta de las velocidades final (V2) e inicial (V1).



Solución:
Primero realizamos un esquema para visualizar los vectores de las velocidades.

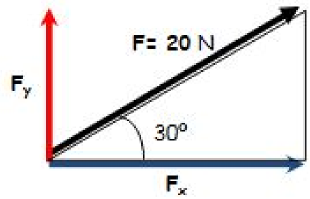


Luego, geométricamente vemos la resta V2-V1



Finalmente, la dirección y el sentido de la resta viene dada por

Problema 12.
Se presenta una fuerza $\vec{F}$ aplicada sobre un objeto ubicado en el origen del plano cartesiano. Calcule la fuerza vertical y horizontal que se efectúan sobre dicho objeto.



Solución:

En la figura se presenta el módulo del vector:

$$|\vec{F}| = 20$$

Y el ángulo que la fuerza forma con el eje horizontal es:

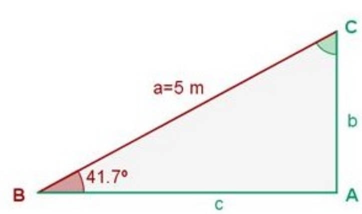
$$\alpha = 30°$$

Las componentes vienen dadas por las proyecciones del vector:

$$\begin{aligned} F_x &= |\vec{F}| \cos(30°) \\ &= 20\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y &= |\vec{F}| \sin(30°) \\ &= 20\frac{1}{2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

Problema 13.
Se tiene el triángulo rectángulo ABC, se conoce $a = 5m$ y $B = 41,7°$. Resuelva para obtener las medidas de los lados del tríangulo y sus ángulos.



Solución:
Y que los ángulos dentro de un triángulo suman 180°, inmediatamente obtenemos

$C = 180° - (90° + 41,7°) = 48,3°$

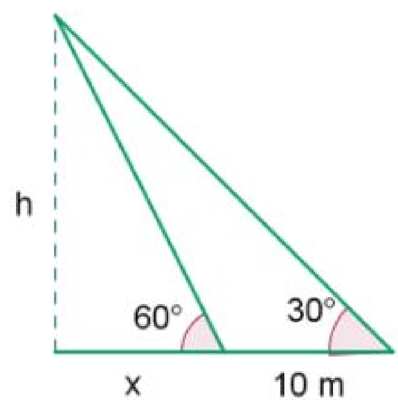
Luego, obtenemos las longitudes de los catetos

$$b = a\sin(B) = 3,326m$$

$$c = a\cos(B) = 3,733m$$

Problema 14.
Calcule la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de 30° y si nos acercamos 10m, bajo un ángulo de 60° .

Solución:
Primero, hacemos un bosquejo de la situación. Llamamos h a la altura del árbol y x a la distancia a la base del árbol luego de habernos acercado 10m a este.



$$\tan(30°) = \frac{h}{10+x} \quad\longrightarrow\quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{10+x}$$

$$tan(60°) = \frac{h}{x} \quad\longrightarrow\quad \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, procedemos a calcular sus valores.

De la primera ecuación:

$$10\sqrt{3} + \sqrt{3}x = 3h$$

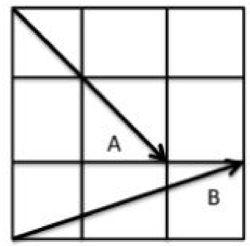
De la segunda ecuación:

$$\sqrt{3}x = h$$

Restamos la segunda ecuación de la primera y depejamos h.

$$2h = 10\sqrt{3} \quad\longrightarrow\quad h = 5\sqrt{3}$$

Problema 15.
Se tiene un cuadrado de lado 3 unidades. Este se divide uniformemente en 9 secciones cuadradas. Tome como positivas las distancias hacia la derecha y hacia arriba. Se le pide calcular el módulo de la resta de $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



Solución:

Se debe calcular el valor de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, para esto se ve la distancia recorrida por el vector desde su origen hasta la flecja

$$\vec{A} = (2, -2)$$

$$\vec{B} = (3, 1)$$

Se calcula la resta de los vectores

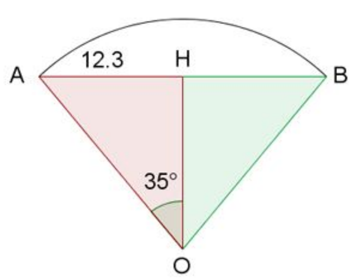
$$\vec{A} - \vec{B} = (2 - 3, -2 - 1) = (-1, -3)$$

Y luego calculamos el módulo de este resultado

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

Problema 16.
Calcule el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24.6 m tiene como arco correspondiente a 70°.

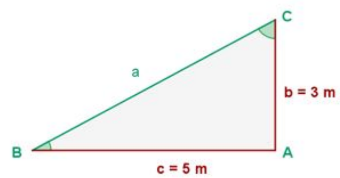
Solución:
Para resolver el problema dibujamos una porción del círculo con la cuerda y el arco dados. Dividimos el arco y la cuerda en dos para así obtener un par de triángulos rectángulos. Con esto podemos calcular fácilmente el radio pedido. Esto se ve en la siguiente figura:



El radio pedido es $OA = OB$.

$$\sin(35°) = \frac{12,3}{OA} \quad \longrightarrow \quad OA = \frac{12,3}{sin(35°)} = 21,44m$$

Problema 17.
Se tiene el triángulo rectángulo ABC, se conoce $b = 3m$ y $c = 55m$. Resuelva para obtener las medida de la hipotenusa y los ángulos del triángulo.



Solución:

$$C = \arctan\left(\frac{5}{3}\right) = 59,04°$$

Ya que los ángulos dentro de un triángulo suman 180°, inmediatamente obtenemos

$$B = 180° - (90 + 59,04) = 30,96°$$

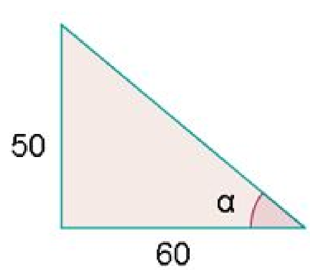
La hipotenusa puede calcularse como

$$a = \frac{c}{\sin(C)} = 5,831m$$

Problema 18.
Un árbol de $50m$ de alto proyecta una sombra de $60m$ de largo. Calcule el ángulo de elevación del sol.

Solución:

El problema puede representarse mediante un triángulo rectángulo en donde el ángulo de elevación del sol es α.



Luego, calculamos el ángulo de elevación

$$\tan(\alpha) = \frac{50}{60} \quad \longrightarrow \quad \alpha = \arctan\left(\frac{50}{60}\right) = 39,806^\circ$$

Problema 19.

Calcule el vector unitario que va en el mismo sentido y dirección que $\vec{v} = \left(1, -\dfrac{4}{3}\right)$.

Solución:

Llamamos $\vec{w}$ al vector unitario a calcular, este se define como:

$$\vec{w} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

En donde:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(1)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{5}{3}$$

Luego,

$$\vec{w} = \frac{\left(1, -\dfrac{4}{3}\right)}{\dfrac{5}{3}} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

Problema 20.

Utilice las fórmulas de suma de ángulos para calcular las razones trigonométricas del ángulo 225°

Solución:

$$\sin(225^\circ) = \sin(180^\circ + 45^\circ) = \sin(180^\circ)\cos(45^\circ) + \sin(45^\circ)\cos(180^\circ)$$

En donde $\sin(180^\circ) = 0$ y $\cos(180^\circ) = -1$

$$\sin(225^\circ) = -\sin(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(225^\circ) = \cos(180^\circ + 45^\circ) = \cos(180^\circ)\cos(45^\circ) - \sin(180^\circ)\sin(45^\circ)$$

$$\cos(225^\circ) = -\cos(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(225°) = \tan(180° + 45°) = \frac{\tan(180°) + \tan(45°)}{1 - \tan(180°)\tan(45°)}$$

Sabemos que $\tan(180°) = 0$, nos queda:

$$\tan(225°) = \tan(45°) = 1$$

Problema 21.
Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 0, 1)$ calcule $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$.

Solución:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$$

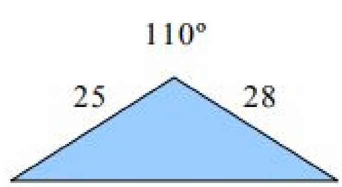
$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = -2\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$$

Se hace evidente una de las propiedades del producto cruz:

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$$

Problema 22.
Calcule los lados y ángulos faltantes del triángulo.



Solución:
Para esto utilizaremos el teorema del seno y el teorema del coseno.

El teorema del coseno nos indica la medida del lado faltante:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(a)$$

Reemplazando convenientemente:

$$a^2 = 25^2 + 28^2 - 2 \cdot 25 \cdot 28 \cdot \cos(110°) \quad \longrightarrow \quad a^2 = 1885 \quad \longrightarrow \quad a = 43,42$$

A continuación, utilizamos el teorema del seno para calcular uno de los ángulos faltantes.

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

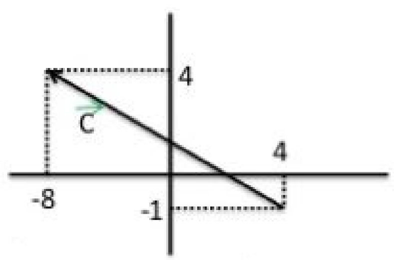
Reemplazando:

$$\frac{43,42}{\sin(110°)} = \frac{25}{\sin(B)} \quad \longrightarrow \quad \sin(B) = 0,54 \quad \longrightarrow \quad B = 32,76°$$

Sabemos que los ángulos de un triángulo suman 180°, luego el ángulo faltante es:

$$C = 180° - 110° - 32,76° = 37,24°$$

Problema 23.
En la figura se indica el vector $\vec{C}$ en el plano cartesiano. Se pide escribir las componentes, módulo y vector unitario de $\vec{C}$.



Solución:

Las componentes del vector vienen dadas por la resta entre el extremo y el origen del vector.

$$\vec{C} = (-8, 4) - (4, -1) = (-12, 5)$$

El módulo del vector es:

$$|\vec{C}| = \sqrt{(-12)^2 + (5)^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$$

Finalmente, el vector unitario se obtiene dividiendo el vector pos su módulo.

$$\vec{u_c} = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{(-12, 5)}{13} = (-12/13, 5/13)$$

Problema 24.

Utilice las fórmulas del ángulo doble para calcular las razones trigonométricas del ángulo $-840°$

Solución:

Primero debemos notar que el ángulo $-840°$ es equivalente a $-120°$, calcularemos las razones para este valor. También, ocuparemos que $sin(-x) = -sin(x)$ dado que la función es impar, que $cos(-x) = cos(x)$ dado que es una función par y que $tan(-x) = -tan(x)$ dado que la función es impar.

$$\sin(-840°) = \sin(-120°) = -\sin(120°)$$

$$-\sin(120°) = -\sin(180° - 60°) = -(\sin(180°)\cos(60°) - \sin(60°)\cos(180°))$$

En donde $\sin(180°) = 0$ y $\cos(180°) = -1$

$$-\sin(120°) = -\sin(180° - 60°) = -\sin(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-840°) = \cos(-120°) = \cos(120°)$$

$$\cos(120°) = \cos(180° - 60°) = \cos(180°)\cos(60°) + \sin(180°)\sin(60°)$$

$$\cos(120°) = -\cos(60°) = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(-840°) = \tan(-120°) = -\tan(120°)$$

$$-\tan(120°) = -\tan(180° - 60°) = -\left(\frac{\tan(180°) - \tan(60°)}{1 + \tan(180°)\tan(60°)}\right)$$

En donde $\tan(180°) = 0$

$$-\tan(120°) = \tan(60°) = \sqrt{3}$$

Problema 25.
Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$ y $\vec{w} = (-1, 3, 0)$, calcule el producto cruz $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$.

Solución:

Primero calculamos $\vec{v} \times \vec{w}$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

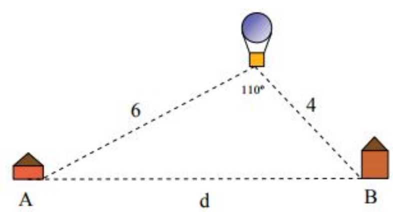
$$\vec{v} \times \vec{w} = -3\vec{i} - 1\vec{j} + 6\vec{k}$$

Ahora calculamos lo pedido

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = (-3, -1, 6) \cdot (1, 2, 3) = -3 - 2 + 18 = 13$$

Problema 26.
Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de 50° con respecto al suelo, y otro B, situado al otro lado y en línea recta, con un ángulo de 60° con respecto al suelo. Sabiendo que el globo se encuentra a una distancia de 6 km del pueblo A y a 4 km del pueblo B, calcule la distancia entre los pueblos A y B.

Solución:
Para empezar hacemos un bosquejo de la situación enunciada:



El ángulo debajo del globo es de 110° porque si trazáramos una perpendicular desde el globo al suelo, a la izquierda tendríamos 50° y a la derecha 60°.

Ahora aplicamos el teorema del coseno para calcular la distancia entre los pueblos d.

$$d^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos(110^\circ) \quad \longrightarrow \quad d = 8,27km$$

Problema 27.
Demuestre que los vectores $\vec{a} = (4, -6)$ y $\vec{b} = (-4, 6)$ son paralelos a $\vec{v} = (2, -3)$.

Solución:

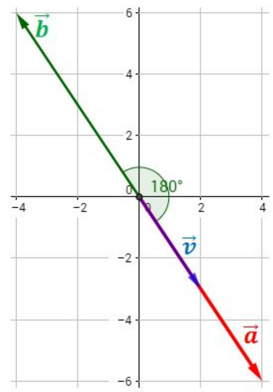
Se sabe que si dos vectores son paralelos entre si el ángulo entre ellos es 0° o 180° y que $\cos(0^\circ) = 1$ y $\cos(180^\circ) = -1$. Luego, podríamos calcular el producto escalar. Viendo las componentes de los vectores notamos que existe una manera más fácil de demostrar lo pedido:

$$\vec{a} = 2\vec{v} \qquad \text{y} \qquad \vec{b} = -2\vec{v}$$

El vector $\vec{a}$ tiene la misma dirección y sentido que el vector $\vec{v}$, por lo tanto el ángulo entre ellos es 0°.

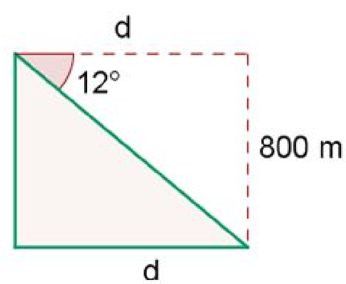
El vector $\vec{b}$ tiene la misma dirección y sentido opuesto que el vector $\vec{v}$, entonces el ángulo entre ellos es 180°.

Se concluye que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos a $\vec{v}$.



Problema 28.
Un dirigible está volando a 800 m de altura y distingue un pueblo con un ángulo de depresión de 12°. ¿A qué distancia del pueblo se halla?

Solución:
El problema puede representarse mediante un triángulo rectángulo en donde la distancia al puebo es d.



Notamos que

$$\tan(12°) = \frac{800}{d} \quad \longrightarrow \quad d = \frac{800}{\tan(12°)} = 3763,7m$$

Problema 29.
Calcule un vector unitario ortogonal a $\vec{u} = (3, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 3, 4)$.

Solución:
El producto cruz $\vec{u} \times \vec{v}$ nos da un vector perpendicular a ambos vectores.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = 7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}$$

Ahora, calculamos la norma del vector resultante.

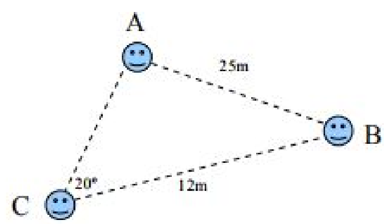
$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(7)^2 + (-14)^2 + (7)^2} = \sqrt{294}$$

Finalmente, dividimos el vector ortogonal por su norma para así obtener un vector unitario ortogonal y lo llamamos $\vec{w}$

$$\vec{w} = \left(\frac{7}{\sqrt{294}}, \frac{-14}{\sqrt{294}}, \frac{7}{\sqrt{294}} \right)$$

Problema 30.
Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Alberto y Berto hay 25 m, y entre Berto y Camilo, 12 m. El ángulo formado en la esquina de Camilo es de 20°. Calcula la distancia entre Alberto y Camilo.

Solución:
Primero hacemos un bosquejo de la situación.



Utilizamos el teorema del seno para hallar uno de los ángulos faltantes.

$$\frac{25}{\sin(20°)} = \frac{12}{\sin(A)} \quad \longrightarrow \quad \sin(A) = 0,16 \quad \longrightarrow \quad A = 9,45°$$

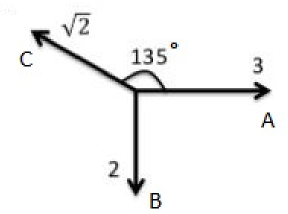
Dado que los ángulos de un triángulo suman 180°, la medida del ángulo que nos falta es:

$$B = 180° - 20° - 9,46° = 150,55°$$

Ahora que tenemos los ángulos podemos utilizar el teorema del seno para calcular la distancia AC entre Alberto y Camilo.

$$\frac{25}{\sin(20°)} = \frac{AC}{\sin(150,55°)} \quad \longrightarrow \quad AC = 35,94m$$

Problema 31.
Se presentan tres vectores con origen en $(0,0)$ en el plano cartesiano. Calcular $\vec{D}$ dado por la suma de estos.



Solución:

Los vectores deben descompoenerse en sus componentes en los ejes coordenados para luego efectuar la suma.

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= (3,0) \\
\vec{B} &= (0,-2) \\
\vec{C} &= \Big(-\sqrt{2}\,\cos(45°), \sqrt{2}\,\cos(45°)\Big) \\
&= (-1,1)
\end{aligned}
$$

Así,

$$\vec{D} = (3+0-1, 0-2+1) = (2,-1)$$

Problema 32.
Calcule el área del paralelógramo que se define por los vectores $\vec{a} = (1,3,2)$ y $\vec{b} = (5,4,1)$.

Solución:
El área viene dada por la norma del producto cruz $\vec{a} \times \vec{b}$ o $\vec{b} \times \vec{a}$.

Procedemos a calcular $\vec{a} \times \vec{b}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -5\vec{i} + 9\vec{j} - 11\vec{k}$$

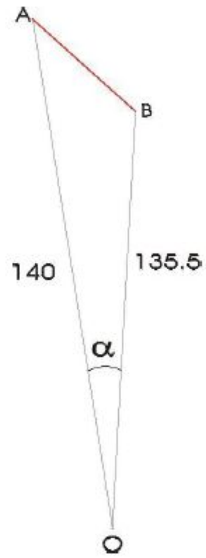
La norma del vector resultante es el área del paralelogramo

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + (9)^2 + (-11)^2} = \sqrt{227}$$

Problema 33.
Dos aviones salen de un mismo punto en distintas direcciones; el ángulo que forman sus direcciones es $5,35°$. Suponiendo que los vuelos fueron en línea recta y que uno ha recorrió 140 km y el otro 135,5 km, ¿qué distancia habrá entre los puntos de aterrizaje?

Solución:

La sitación se representa acorde al siguiente dibujo:



En donde se presentan las distancias recorridas y $\alpha = 5,35°$. La distancia que nos piden calcular es AB. Para resolver utilizamos el teorema del coseno:

$$AB^2 = 140^2 + 135,5^2 - 2 \cdot 140 \cdot 135,5 \cdot \cos(5,35°)$$

Calculando se obtiene:

$$AB^2 = 200,25km \quad \longrightarrow \quad AB = 14,15km$$

Problema 34.
Dados los vectores $\vec{c} = (2,1,3)$ y $\vec{d} = (3,1,2)$ calcule $\vec{c} \times \vec{d}$ y compruebe que es perpendicular a ambos vectores.

Solución:
Calculamos el prodcuto cruz pedido

$$\vec{c} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{c} \times \vec{d} = -1\vec{i} + 5\vec{j} - 1\vec{k}$$

Llamamos $\vec{c} \times \vec{d} = \vec{e} = (-1, 5, -1)$

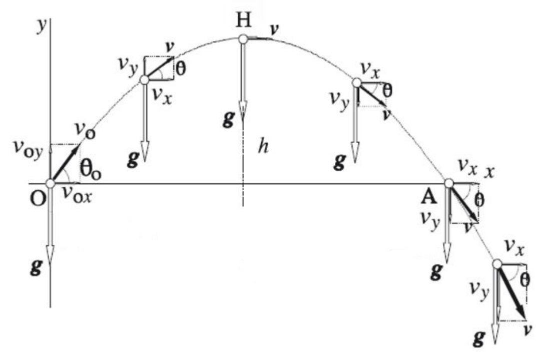
Luego, el producto punto de los vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ con $\vec{e}$ debe ser 0. Esto se debe a que el ángulo entre ellos es 90° y $\cos(90°) = 0$.

$$\vec{c} \cdot \vec{e} = (2,1,3) \cdot (-1, 5 - 1) = -2 + 5 - 3 = 0$$

$$\vec{d} \cdot \vec{e} = (3,1,2) \cdot (-1, 5 - 1) = -3 + 5 - 2 = 0$$

Problema 35.
Haga un diagrama vectorial del movimiento de un proyectil. El diagrama debe ser desde el inicio hasta el final de su trayectoria. Este parte desde el origen del sistema cartesiano con una velocidad v_0 con un ángulo $0 < \theta_0 < 90°$.

Solución:
La única aceleración que actúa sobre el cohete es la gravedad, esta siempre apunta hacia el centro de la tierra y la llamamos g. Luego, denotamos por v_x a la velocidad en el eje x, esta siempre va en el sentido del avance del misil. Por último, llamamos v_y a la velocidad en el eje y. Cuando el cohete se encuentra en ascenso esta apunta hacia arriba y cuando va en descenso apunta hacia abajo, siempre en el sentido en el que se mueve el proyectil en el eje y.



Problema 36.
Calcule el volumen del paralepepípedo cuyas aristas son los vectores $\vec{u} = (3, -2, 5)$, $\vec{v} = (2, 2, -1)$ y $\vec{w} = (-4, 3, -2)$ que concurren en un mismo vértice.

Solución:
El volumen pedido se calcula como

$$V = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} 3 - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} (-2) + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} 5 = -1 \cdot 3 - 8 \cdot 2 + 14 \cdot 5 = 51$$

Problema 37.
Calcule el volumen del paralepepipedo conformado por los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ $\vec{v} = (-3, 1, 4)$ $\vec{w} = (1, 2, 1)$

Solución:
Esto se calcula como

$$V = |u \cdot (v \times w)|$$

Lo que se puede calcular como el valor absoluto del producto vectorial de los tres vectores.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} 1 - \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} 2 + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} 3 = -7 \cdot 1 + 7 \cdot 2 - 7 \cdot 3 = -14$$

Finalmente, tomando el valor absoluto:

$$V = |-14| = 14$$

Problema 38.
Demuestre que los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (0, 1, 1)$ son linealmente independientes.

Solución:

Para demostrar lo pedido planteamos la siguiente ecuación:

$$(0, 0, 0) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, 1, 1)$$

Nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a + b = 0$$
$$b + c = 0$$
$$a + c = 0$$

La única solución que existe es la trivial:

$$a = 0, b = 0, c = 0$$

Por lo tanto, los vectores son linealmente independientes.

Problema 39.
Dados los vectores $\vec{u} = (2, k)$ y $\vec{v} = (3, -2)$ calcule el valor de k con tal que:

a) Los vectores sean paralelos.

b) Los vectores sean perpendiculares.

Solución:
Este problema se resuelve utilizando el producto punto, llamamos α al ángulo entre los vectores.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\alpha)$$

a) Para que los vectores sean paralelos el ángulo entre ellos debe ser $0°$ o $180°$ y sabemos que $\cos(0°) = 1$ y $\cos(180°) = -1$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\alpha) = \pm|\vec{u}||\vec{v}|$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 3 + k \cdot (-2) = 6 - 2k$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{4 + k^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Reemplazando en la ecuación del producto punto nos queda:

$$\pm\sqrt{52 + 13k^2} = 6 - 2k$$

$$9k^2 + 24k + 16 = 2 \quad \longrightarrow \quad (3k + 4)^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad k = -\frac{4}{3}$$

b) Para que los vectores sean perpendiculares el ángulo entre ellos debe ser 90°, y sabemos que $\cos(90°) = 0$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|cos(90°) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 3 + k \cdot (-2) = 6 - 2k = 0 \quad \longrightarrow \quad k = 3$$

Problema 40.
Calcule los dos vectores unitarios ortogonales a $\vec{a} = (2, -2, 3)$ y $\vec{b} = (3, -3, 2)$.

Solución:

Los vectores ortogonales vienen dados por el producto cruz entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$. El resultado del repectivo producto cruz se normaliza y se obtiene un vector ortogonal unitario.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 0\vec{k} = 5\vec{i} + 5\vec{j}$$

Utilizamos la propiedad del producto cruz

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

Luego,

$$\vec{b} \times \vec{a} = -5\vec{i} - 5\vec{j}$$

Y la norma de ambos productos cruz es:

$$|\vec{b} \times \vec{a}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

Finalmente, obtenemos los dos vectores ortogonales unitarios pedidos y los llamamos $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} = (\frac{5}{5\sqrt{2}}, \frac{5}{5\sqrt{2}}, 0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

$$\vec{v} = (-\frac{5}{5\sqrt{2}}, -\frac{5}{5\sqrt{2}}, 0) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

Problema 41.
Determine la proyección de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$. Los puntos son $A = (6, 0)$, $B = (3, 5)$ y $C = (-1, -1)$.

Solución:
Primero determinamos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3,5) - (6,0) = (-3,5)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1,-1) - (6,0) = (-7,-1)$$

Llamamos AD a la proyección y se calcula como:

$$AD = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$$

En donde

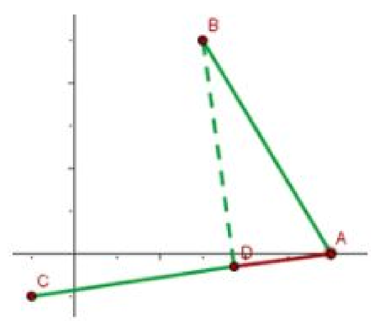
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-3)(-7) + (5)(-1) = 16$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = 5\sqrt{2}$$

Finalmente, reemplazando en la fórmula de la proyección:

$$AD = \frac{16}{5\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{5}$$

Esto puede verse gráficamente como sigue:



Problema 42.
Calcule el ángulo entre los vectores $\vec{v} = (-2,1)$ y $\vec{w} = (-2,6)$

Solución:

Sabemos de la propiedad del producto punto que

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}|\,|\vec{w}|\,\cos(\alpha)$$

Luego, podemos conocer el coseno del ángulo en cuestión y luego aplicar la función inversa para obtener el ángulo

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|}$$

Procedemos a calcular el producto punto entre los vectores y el módulo de cada uno

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (-2, 1) \cdot (-2, 6) = (-2) \times (-2) + (1) \times (6) = 10$$

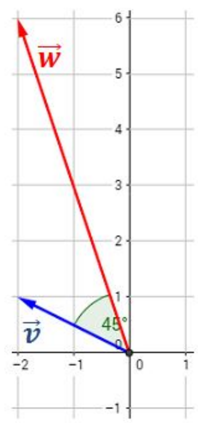
$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(-2)^2 + (6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Finalmente

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|} = \frac{10}{\sqrt{5} \times 2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$



Problema 43.

Calcule el valor de $\cos(20^\circ) \times \cos(40^\circ) \times \cos(80^\circ)$

Solución:

La fórmula de prostaféresis nos dice que

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \times \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Utilizamos esta propiedad para desglosar los términos en valores conocidos

Primero,

$$\cos(20°) + \cos(60°) = 2 \times \cos(20°) \times \cos(40°)$$

Reemplazamos,

$$\cos(20°) \times \cos(40°) \times \cos(80°) = \frac{1}{2} \times \Big(\cos(60°) + \cos(60°)\Big) \times \cos(80°)$$

Y sabemos que

$$\cos(60°) = \frac{1}{2}$$

Reemplazamos,

$$\cos(20°) \times \cos(40°) \times \cos(80°) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \cos(80°) + \cos(20°) \cdot \cos(80°)\right)$$

Descomponemos

$$\cos(20°) \times \cos(80°) = \frac{1}{2} \times \Big(\cos(100°) + \cos(60°)\Big)$$

Reemplazamos,

$$\cos(20°) \times \cos(40°) \times \cos(80°) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \cos(80°) + \frac{1}{2} \times \cos(100°) + \frac{1}{4}\right)$$

$$\cos(20°) \times \cos(40°) \times \cos(80°) = \frac{1}{4} \times \left((\cos(80°) + \cos(100°) + \frac{1}{8}\right)$$

Utilizamos que

$$\cos(80°) + \cos(100°) = 2 \times (\cos(90°) \times \cos(10°))$$

Y sabemos que

$$\cos(90°) = 0$$

Finalmente nos queda:

$$\cos(20°) \times \cos(40°) \times \cos(80°) = \frac{1}{4} \times (2 \times \cos(90°) \times \cos(10°)) + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

Problema 44.
Determine el área del triángulo cuyos vértices son $A = (1, 1, 3)$, $B = (2, -1, 5)$ y $C = (-3, 3, 1)$.

Solución:
Primero, debemos encontrar un par de vectores que representen lados del triángulo. Estos son:

$$\overrightarrow{AB} = (2, -1, 5) - (1, 1, 3) = (1, -2, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-3, 3, 1) - (1, 1, 3) = (-4, 2, -2)$$

Luego, el área del paralelogramo formado por $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ viene dada por la norma del producto cruz entre ellos.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 0\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(0)^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

Y el área del triángulo pedido es la mitad del área del paralelogramo. Finalmente,

$$A = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

Problema 45.
Resuelva la ecuación $\sin(\alpha) + \cos(\alpha) = 1$ en el intervalo $[0, 2\pi)$

Solución:
Utilizamos la identidad trigonométrica

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

De aquí se despeja

$$\sin(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$$

Reemplazando en la ecuación inicial:

$$\pm\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} + \cos(\alpha) = 1 \quad \longrightarrow \quad \pm\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = 1 - \cos(\alpha)$$

Elevamos ambos lados de la ecuación al cuadrado:

$$1 - \cos^2(\alpha) = (1 - \cos(\alpha))^2$$

Expandiendo y reordenando nos queda:

$$\cos^2(\alpha) - \cos(\alpha) = 0 \quad \longrightarrow \quad \cos(\alpha)(\cos(\alpha) - 1) = 0$$

Analizamos las soluciones de la ecuación:

$$\cos(\alpha) = 0 \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{3\pi}{2}, \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$(\cos(\alpha) - 1) = 0 \quad \longrightarrow \quad \alpha = 0$$

Reemplazamos los valores de α en la ecuación inicial:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

Por lo que $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$ no es una solución válida.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Por lo que $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ es una solución válida.

$$\sin(0) + \cos(0) = 1$$

Por lo que $\alpha = 0$ es una solución válida.

Problema 46.
Demuestre que los vectores $\vec{a} = (-y, x)$ y $\vec{b} = (y, -x)$ son perpendiculares a $\vec{v} = (x, y)$

Solución:

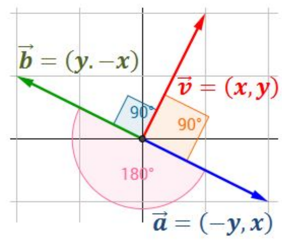
Se sabe que si dos vectores son perpendiculares el ángulo entre ellos es $90°$ y que $\cos(90°) = 0$. Luego el producto punto debe ser 0.

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = |\vec{a}|\,|\vec{v}|\,\cos(90°) = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{v} = |\vec{b}|\,|\vec{v}|\,\cos(90°) = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = (-y, x) \cdot (x, y) = (-y)(x) + (x)(y) = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{v} = (y, -x) \cdot (x, y) = (y)(-x) + (x)(y) = 0$$



Problema 47.
Sea $a = \tan(25°)$. Calcule el valor de la siguiente expresión en función de a:

$$\frac{\tan(205°) - \tan(115°)}{\tan(245°) + \tan(335°)}$$

Solución:
Utilizamos la fórmula

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \times \tan(\beta)}$$

Descomponemos

$$\tan(205°) = \tan(25° + 180°)$$

$$\tan(205°) = \frac{\tan(25°) + \tan(180°)}{1 - \tan(25°) \times \tan(180°)}$$

Reemplazando con el valor de a

$$\tan(205°) = \frac{a + \tan(180°)}{1 - a \times \tan(180°)}$$

En donde

$$\tan(180°) = 0$$

Luego,

$$\tan(205°) = \frac{a + 0}{1 - 0} = a$$

Ahora descomponemos $\tan(115°)$, para esto utilizaremos las fórmulas del ángulo doble para el seno y el coseno

$$\tan(115°) = \frac{\sin(25°) + \sin(90°)}{\cos(25°) + \cos(90°)}$$

$$\tan(115°) = \frac{\sin(25°) \times \cos(90°) + \cos(25°) \times \sin(90°)}{\cos(25°) \times \cos(90° - \sin(25°) \times \sin(90°)}$$

Es sabido que $sen(90°) = 1$ y $cos(90°) = 0$, reemplazamos en la expresión anterior y nos queda

$$\tan(115°) = \frac{\cos(25°)}{-\sin(25°)} = -\frac{1}{\tan(25°)} = -\frac{1}{a}$$

A continuación descompondremos $\tan(245°)$

$$\tan(245°) = \tan(360° - 115°)$$

$$\tan(245°) = \frac{\tan(360°) - \tan(115°)}{1 + \tan(360°) * \tan(115°)}$$

Sabemos que $\tan(360°) = 0$, reemplazamos en la ecuación resultando

$$\tan(245°) = -\tan(115°)$$

Antes se obtuvo que $\tan(115°) = -\frac{1}{a}$, utilizando este resultado

$$\tan(245°) = \frac{1}{a}$$

Por último, descomponemos $\tan(235°)$

$$\tan(235°) = \tan(360° - 25°)$$

$$\tan(235°) = \frac{tan(360°) - tan(25°)}{1 + tan(360°) \times \tan(25°)}$$

$$\tan(235°) = -\tan(25°) = -a$$

Finalmente, reemplazamos en la ecuación inicial

$$\frac{\tan(205°) - \tan(115°)}{\tan(245°) + \tan(335°)} = \frac{a + \frac{1}{a}}{\frac{1}{a} - a} = \frac{a^2 + 1}{1 - a^2}$$

Problema 48.
Calcule los posibles valores de a con tal de que los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$ y $C = (1, 6, a)$ son tres vértices de un paralelogramo de área 3.

Solución:
Calculamos dos vectores que representan aristas del paralelogramo

$$\overrightarrow{AB} = (1,1,1) - (1,0,1) = (0,1,0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (1,6,a) - (1,0,1) = (0,6,a-1)$$

La norma del producto curz de estos vectores representa el área del paralelogramo

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & a-1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (a-1)\vec{i} - 0\vec{j} - 0\vec{k} = (a-7)\vec{i}$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(a-1)^2}$$

Y por enunciado, debe cumplirse que el área sea igual a 3

$$\sqrt{(a-1)^2} = 3 \quad \longrightarrow \quad (a-1)^2 = 9$$

Luego,

$$\begin{aligned} a-1 = 3 \quad &\longrightarrow \quad a = 4 \\ a-1 = -3 \quad &\longrightarrow \quad a = -2 \end{aligned}$$

Problema 49.
Resuelva para el valor de x que satisface la ecuación

$$2\tan(x) - 3\cot(x) = 1$$

Solución:
Empezamos por reordenar la ecuación:

$$2\tan(x) - 3\frac{1}{\tan(x)} - 1 = 0$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por $\tan(x)$ obteniendo

$$2\tan^2(x) - \tan(x) - 3 = 0$$

Resolvemos para $\tan(x)$ utilizando la fórmula para ecuaciones cuadráticas:

$$\tan(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

Luego, tenemos dos posibles soluciones:

$$\tan(x) = \frac{3}{2} \quad \longrightarrow \quad x = 56,31^\circ + 2k\pi$$

$$\tan(x) = -1 \quad \longrightarrow \quad x = 135^\circ + 2k\pi$$

Al ingresar ambos valores a la ecuación inicial se cumple la igualdad, por lo tanto, ambas soluciones son válidas.

Problema 50.
Demuestre que los vectores $\vec{a} = (-y, x)$ y $\vec{b} = (y, -x)$ son paralelos entre si.

Solución:

Se sabe que si dos vectores son paralelos entre si el ángulo entre ellos es 0° o 180° y que $\cos(0^\circ) = 1$ y $\cos(180^\circ) = -1$. Luego, procedemos a calcular el producto escalar.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-y, x) \cdot (y, -x) = (-y)(y) + (x)(-x) = -y^2 - x^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-y)^2 + (x)^2} = \sqrt{y^2 + x^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(y)^2 + (-x)^2} = \sqrt{y^2 + x^2}$$

Es importante notar que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|$$

y

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}|^2 = -|\vec{b}|^2$$

La ecuación del producto punto es:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos(\alpha)$$

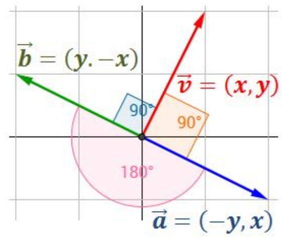
Reemplazando con los valores calculados y las igualdades descubiertas:

$$-|\vec{a}|^2 = |\vec{a}|\,|\vec{a}|\,\cos(\alpha) = |\vec{a}|^2\,\cos(\alpha)$$

Con ello,

$$\cos(\alpha) = -1 \quad \longrightarrow \quad \alpha = 180^\circ$$

Por lo tanto, se deduce que los vectores son paralelos y que tienen sentidos opuestos.



Problema 51.
Calcule el valor de x que satisface la siguiente ecuación:

$$\tan(x) - \cot(x) = \csc(x)$$

Solución:
Comenzamos reemplazando los valores de cada término de la ecuación por sus definiciones

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\sin(x)} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1 + \cos(x)}{\sin(x)}$$

Multiplicando cruzado nos queda

$$\sin^2(x) = \cos(x) + \cos^2(x)$$

Y sabemos que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, reemplazamos $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ en la ecuación

$$1 - \cos^2(x) = \cos(x) + \cos^2(x) \quad \longrightarrow \quad 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$$

Factorizamos

$$(1 + \cos(x))(2\cos(x) - 1) = 0$$

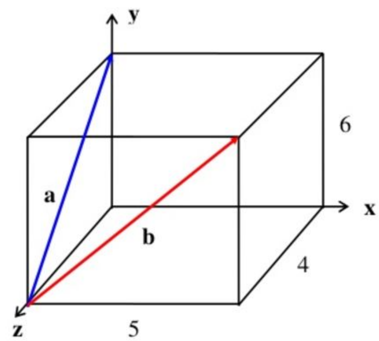
Esta última expresión nos lleva a dos posibles soluciones para el valor de x

1) $\cos(x) = -1 \quad \longrightarrow \quad x = -\pi + 2k\pi$

2) $\cos(x) = \dfrac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

Se descarta la primera solución ya que se tendría que $\sin(x) = 0$ y esto implicaría que en el desglose de la ecuación inicial se estaría dividiendo por cero. Luego, la solución correcta es $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Problema 52.
Encuentre el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



Solución:
Escribimos los vectores en forma vectorial:

$$\vec{a} = (0, 6, -4)$$
$$\vec{b} = (5, 6, 0)$$

La norma de estos vectores es:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{52}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{(5)^2 + (6)^2} = \sqrt{61}$$

Llamamos $\vec{c}$ a la suma de $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$$\vec{c} = (0, 6, -4) + (5, 6, 0) = (5, 12, -4)$$

Y la norma de este es:

$$|\vec{c}| = \sqrt{(5)^2 + (12)^2 + (-4)^2} = \sqrt{185}$$

Finalmente, aplicamos la regla del coseno:

$$|c|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos(\theta)$$

Y despejamos θ de la ecuación:

$$\theta = 50,2^\circ$$

Problema 53.
Resuelva la ecuación $\cos^2(x) - 3\sin^2(x) = 0$

Solución:
Utilizamos la identidad $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ para dejar el coseno en función del seno.

$$1 - \sin^2(x) - 3\sin^2(x) = 0$$

$$1 - 4\sin^2(x) = 0$$
$$4\sin^2(x) = 1$$
$$\sin^2(x) = \frac{1}{4} \quad \longrightarrow \quad \sin(x) = \pm\frac{1}{2}$$

Debemos analizar las soluciones para $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ y $\sin(x) = -\dfrac{1}{2}$.

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad x = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$

Y esto nos da dos posibles soluciones:

$$x_1 = 30^\circ + 2k\pi$$
$$x_2 = 150^\circ + 2k\pi$$

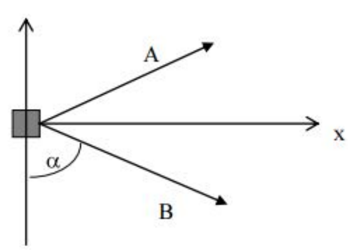
$$\sin(x) = -\frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad x = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Nuevamente obtenemos dos posibles soluciones:

$$x_3 = 210^\circ + 2k\pi$$
$$x_4 = 330^\circ + 2k\pi$$

Al reemplazar x_1, x_2, x_3 y x_4 en la ecuación inicial notamos que todas las soluciones obtenidas son válidas.

Problema 54.
Se tiene un bloque jalado por las cuerdas A y B, estas ejercen respectivamente una tensión $\vec{T}_A = (18.13, 8.45)$ y $\vec{T}_B$ desconocida. Calcule el ángulo α tal que la fuerza resultante se encuentre en el eje x positivo y tenga móduo igual a 40.



Solución:

Del enunciado sabemos que

$$\vec{T}_{A,x} = 18.13$$

$$\vec{T}_{A,y} = 8.45$$

Para que la fuerza resultante esté sobre el eje x debe cumplirse que la suma de las fuerzas $\vec{T}_{A,y}$ y $\vec{T}_{B,y}$ sea 0. Luego,

$$\vec{T}_{B,y} = -8.45$$

Y para que el módulo sea igual a 40:

$$\vec{T}_{A,x} + \vec{T}_{B,x} = 40 \quad \longrightarrow \quad \vec{T}_{B,x} = 21.87$$

Entonces, el vector $\vec{T}_B$ nos queda:

$$\vec{T}_B = (21.87, -8.45)$$

El ángulo α viene dado por:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{8.45}{2178}\right) = 21.1^\circ$$

Problema 55.
Obtenga el valor de x que satisface la siguiente ecuación:

$$\arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right) - \arctan\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Solución:
De las propiedades trigonométricas sabemos que

$$\arctan(\alpha) - \arctan(\beta) = \arctan\left(\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}\right)$$

Reemplazamos esta igualdad en la ecuación

$$\arctan\left(\frac{\frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x+2}}{1 + \frac{x-1}{x-2} \times \frac{x+1}{x+2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Aplicando la función tangente a ambos lados de la ecuación nos queda:

$$\left(\frac{\frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x+2}}{1 + \frac{x-1}{x-2} \times \frac{x+1}{x+2}}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Y sabemos que $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\left(\frac{\dfrac{x-1}{x-2} - \dfrac{x+1}{x+2}}{1 + \dfrac{x-1}{x-2} \times \dfrac{x+1}{x+2}}\right) = 1$$

Procedemos a resolver la ecuación para x

$$\left(\frac{\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}}{1 + \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)}}\right) = 1$$

$$\left(\frac{x^2 + x - 2 - (x^2 - x + -2)}{x^2 - 4 + (x^2 - 1)}\right) = 1$$

$$\left(\frac{2x}{2x^2 - 5}\right) = 1$$

$$2x^2 - 2x - 5 = 0 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{11})$$

Problema 56.
Compruebe la siguiente identidad trigonométrica:

$$\cot(a+b) = \frac{\cot(a)\cot(b) - 1}{\cot(a) + \cot(b)}$$

Solución:
Empezamos utilizando la definición de la cotangente (inversa de la tangente) y utilizamos la identidad de la tangente de suma de ángulos.

$$\cot(a+b) = \frac{1}{\tan(a+b)} = \frac{1}{\dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}} = \frac{1 - \tan(a)\tan(b)}{\tan(a) + \tan(b)}$$

Seguimos desarrollando la última expresión para llegar a la identidad inicial

$$\cot(a+b) = \frac{\dfrac{1}{\tan(a)\tan(b)} - \dfrac{\tan(a)\tan(b)}{\tan(a)\tan(b)}}{\dfrac{\tan(a)}{\tan(a)\tan(b)} + \dfrac{\tan(b)}{\tan(a)\tan(b)}} = \frac{\cot(a)\cot(b) - 1}{\cot(a) + \cot(b)}$$

Problema 57.
Usted tiene el vector $\vec{v} = (0, 2)$ y se le pide calcular el vector unitario que forma un ángulo de $60°$ con $\vec{v}$.

Solución:

Llamamos $\vec{w} = (w_1, w_2)$ al vector que queremos calcular.

Debe cumplirse que:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}|\,|\vec{w}|\,\cos(60°)$$

Los módulos vienen dados por:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = 2 \qquad \text{y} \qquad |\vec{w}| = 1$$

Luego,

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 2\cos(60°) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Calculando el producto punto:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (0, 2) \cdot (w1, w2) = 0 \times w_1 + 2 \times w_2 = 2 \times w_2$$

Igualando,

$$1 = 2 \times w_2 \qquad \longrightarrow \qquad w_2 = \frac{1}{2}$$

$$|\vec{w}| = 1 = \sqrt{{w_1}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

Elevando al cuadrado:

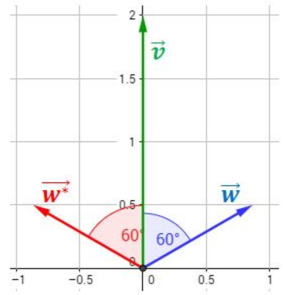
$$1 = {w_1}^2 + \frac{1}{4}$$

Despejando nos queda:

$${w_1}^2 = \frac{3}{4} \qquad \longrightarrow \qquad w_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Finalmente, tenemos dos vectores que cumplen con la condición requerida:

$$\vec{w} = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



Problema 58.
Demuestre que se cumple que:

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \times \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Solución:
De las propiedades del ángulo doble sabemos que

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

Sumando ambas ecuaciones nos queda

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin(\alpha)\cos(\beta)$$

Llamamos

$$\alpha+\beta = x$$

$$\alpha-\beta = y$$

Y nos queda

$$\alpha = \frac{x+y}{2}$$

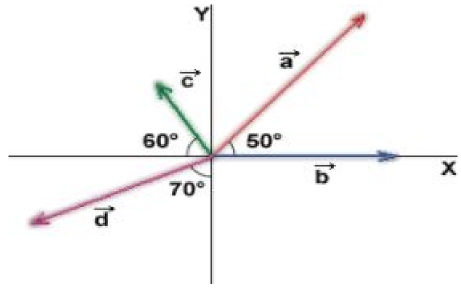
$$\beta = \frac{x-y}{2}$$

Finalmente reemplazamos α y β en términos de x e y y llegamos a la ecuación inicial

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin(\alpha)\cos(\beta)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \times \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Problema 59.
En el diagrama se indican 4 vectores en donde $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 7$, $|\vec{c}| = 4.3$ y $|\vec{d}| = 7.8$. Calcule la suma de estos y el ángulo que forman con la horizontal.



Solución:

Los vectores deben decomponerse rectangularmente.

$$\begin{aligned}
\vec{a}_x &= 8\cos(50°) = 5.14 \\
\vec{a}_y &= 8\sin(50°) = 6.13 \\
\\
\vec{b}_x &= 7 \\
\vec{b}_y &= 0 \\
\\
\vec{c}_x &= -4.3\cos(60°) = -2.15 \\
\vec{c}_y &= 4.3\sin(60°) = 3.72 \\
\\
\vec{d}_x &= -7.8\sin(70°) = -7.33 \\
\vec{d}_y &= -7.8\cos(70°) = -2.67
\end{aligned}$$

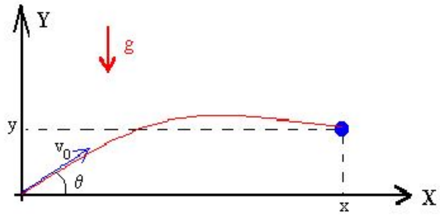
Llamamos $\vec{S}$ al vector resultante de la suma.

$$\vec{S} = (5.14 + 7 - 2.15 - 7.33, 6.13 + 0 + 3.72 - 2.67) = (2.66, 7.18)$$

Finalmente, el ángulo con el eje x viene dado por:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\vec{S}_y}{\vec{S}_x}\right) = \arctan\left(\frac{7.18}{2.66}\right) = 69.67°$$

Problema 60.
Calcule el ángulo con el que debe lanzarse el proyectil con tal de darle al blanco. La velocidad inicial es $V_0 = 89,9m/s$ y las coordenadas del blanco son $x = 159,7m$ $y = 151,7m$.



Solución:
De cinemática sabemos que las velocidades y las posiciones en el instante t vienen dadas por:

$$V_{0x} = V_0 \cdot \cos(\theta)$$
$$V_{0y} = V_0 \cdot \sin(\theta)$$

$$x = x_0 + V_0 \cdot \cos(\theta) t$$
$$y = y_0 + V_0 \cdot \sin(\theta) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Dado que el proyectil se lanza desde el origen, $x_0 = 0$ $y_0 = 0$.

$$x = V_0 \cdot \cos(\theta) t$$
$$y = V_0 \cdot \sin(\theta) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Utilizamos la relación trigonométrica

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \operatorname{tg}^2(\theta)$$

Combinando las últimas tres ecuaciones obtenemos una nueva ecuación independiente del tiempo de la cual podemos despejar el ángulo θ.

$$\left(\frac{g x^2}{2 V_0^2}\right) \operatorname{tg}^2(\theta) - x \operatorname{tg}(\theta) + \left(\frac{g x^2}{2 V_0^2} + y\right) = 0$$

Esta es una ecuación de segundo grado para $\operatorname{tg}(\theta)$. Por lo tanto, se podrán obtener máximo dos soluciones válidas para el problema. Reemplazando con los datos del ejercicio y resolviendo se obtiene:

$$\operatorname{tg}(\theta) = 9{,}15 \quad \longrightarrow \quad \theta = 83{,}8^\circ$$
$$\operatorname{tg}(\theta) = 1{,}18 \quad \longrightarrow \quad \theta = 49{,}8^\circ$$

Ambos ángulos de lanzamiento son válidos para darle al blanco, se ubican en el primer cuadrante y satisfacen la ecuación de segundo orden.

Referencias

Los ejercicios e imágenes se obtuvieron de las siguientes fuentes:

1. *Matesfacil*
   - https://www.matesfacil.com/ESO/geometria_plana/vectores/ejercicios-resueltos-vectores-suma-producto-escalar-modulo.html
2. *Vitutor*
   - http://www.vitutor.com/al/trigo/triActividades.html
   - http://www.vitutor.com/analitica/vectores/ejercicios_producto.html
   - http://www.vitutor.com/analitica/vectores/vector_espacio.html
   - http://www.vitutor.com/analitica/vectores/vectorial_mixto.html
   - http://www.vitutor.com/analitica/vectores/problemas_vectores.html
   - http://www.vitutor.com/al/trigo/e_e.html
   - http://www.vitutor.com/geo/vec/bActivdades.html
   - http://www.vitutor.com/geo/vec/b_a.html
3. *Wikiepdia*
   - https://es.wikipedia.org/wiki/Trayectoria_bal%C3%ADstica
4. *Tagoras*
   - http://tagoras.es/archivos%20pdf/trigonometria03.pdf
   - http://www.tagoras.es/archivos%20pdf/trigonometria05.pdf
   - http://www.tagoras.es/archivos%20pdf/trigonometria01.pdf
   - http://www.tagoras.es/archivos%20pdf/trigonometria02.pdf
5. *Cajón de Ciencias*
   - http://www.cajondeciencias.com/Descargas%20mate2/ER%20teoremas%20seno%20y%20coseno.pdf
6. *Vadenumeros*
   - http://www.vadenumeros.es/cuarto/trigonometria-distancias.htm
7. *Slideshare*
   - https://es.slideshare.net/guest229a344/vectores-problemas
8. *Blog de Enrique Huaman*
   - http://vectores-enriquehuaman.blogspot.cl/p/blog-page.html
9. *Física con ordenador, Curso Interactivo de Física en Internet*
   - http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cinematica/canon/canon.htm
10. *Universidad Tecnológica Nacional*
    - http://www.fra.utn.edu.ar/catedras/algebra/lecturas/3_Vectores.pdf