Nivelación Física ⋆ Problemas Resueltos

Cinemática y su relación con el cálculo

Dirección de Pregrado, Ingeniería UC

Coordinación: Sebastián Urrutia Quiroga
Ayudante: Alberto Valdés González
Revisor: Francisco Eterovic Barra

Introducción

El presente texto corresponde al trabajo realizado por el Equipo de Nivelación de Física durante el primer semestre de 2017. Con el apoyo de la Dirección de Pregrado de la Escuela de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica de Chile, este equipo recopiló y resolvió diversos problemas en cuatro tópicos introductorios al curso *Estática y Dinámica*.

La selección de los problemas tienen como objeto facilitar la adaptación de los alumnos a la física de nivel universitario. El orden de los mismos es incremental en dificultad, de acuerdo al criterio del ayudante que elaboró este documento. En el final del mismo se pueden encontrar las fuentes de donde provienen los problemas e imágenes utilizados en la elaboración de este compilado.

Esperamos que este conjunto de problemas resulte de utilidad para los alumnos, y que contribuya a su proceso educativo en el primer curso de física durante su formación como Ingenieros. Cualquier comentario, favor comunicarse con la Dirección de Pregrado para canalizar las inquietudes a quien corresponda.

Equipo de Nivelación
Primer Semestre de 2017

Problema 1.

La posición de una partícula que se mueve unidimensionalmente esta definida por la ecuación:

$x(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 4$ donde $'x'$ y $'t'$ se expresan en metros y segundos respectivamente. Determine:

a. ¿Cuándo la velocidad es cero?

b. La posición y la distancia total recorrida cuando la aceleración es cero.

Solución:

a. Recordemos que:

$v(t) = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}(2t^3 - 15t^2 + 24t + 4) = 6t^2 - 30t + 24$

Sea t' el tiempo en que la velocidad se anula, entonces $v(t') = 0$.

De este modo:

$0 = v(t') = 6(t')^2 - 30(t') + 24 = 6[(t')^2 - 5(t') + 4] = 6[(t') - 4][(t') - 1]$

Así tenemos que:

$t'_1 = 4$, $t'_2 = 1$

De este modo, tenemos que la velocidad se anula al primer segundo y a los cuatro segundos.

b. Recordemos que:

$a(t) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(6t^2 - 30t + 24) = 12t - 30$

Ahora sea t' el instante en que la aceleración se anula, entonces $a(t') = 0$

Ahora:

$0 = a(t') = 12t' - 30$

Así tenemos que: $t' = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$

Por lo tanto, la posición en este instante es:

$x(t') = x\left(\frac{5}{2}\right) = 2\left(\frac{5}{2}\right)^3 - 15\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 24\left(\frac{5}{2}\right) + 4 = \frac{125}{4} - 3\frac{125}{4} + 60 + 4 = -2\frac{125}{4} + 64 = -\frac{125}{2} + \frac{128}{2} = \frac{3}{2}$

De este modo, la posición de la partícula cuando la aceleración es cero es de $\frac{3}{2}$ metros.

Además la distancia total recorrida esta dada por:

distancia $= |x(t') - x(0)| = |\frac{3}{2} - 4| = \frac{5}{2}$

Finalmente la distancia total recorrida es: $\frac{5}{2}$ metros.

Problema 2.

Pedro es un joven que le gusta practicar atletismo, y en estos momentos esta a segundos de realizar su primera carrera del año. Consideremos a $t_0 = 0$ [s] , el momento en que comienza a correr. De este modo $x(t_0) = 0$ [m]. En $t_1 = 1$ [s] se encuentra en $x(t_1) = 25$ [m] y en $t_2 = 3$ [s] se encuentra en $x(t_2) = 100$ [m].

i) Calcule el desplazamiento que realizo entre t_0 y t_1.
ii) Calcule la velocidad media entre t_0 y t_1.
iii) Calcule el desplazamiento que realizo entre t_1 y t_2.
iv) Calcule la velocidad media entre t_1 y t_2.

Solución:

i) El desplazamiento entre t_0 y t_1 esta dado por:

$$d = x(t_1) - x(t_0) = 25[\text{m}] - 0\ [\text{m}] = 25\ [\text{m}]$$

$$\boxed{\text{desplazamiento} = d = 25[\text{m}]}$$

ii) La velocidad media entre t_0 y t_1, esta dada por:

$$\bar{v} = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{d}{1[\text{s}] - 0[\text{s}]} = \frac{25[\text{m}]}{1[\text{s}]} = 25\left[\tfrac{m}{s}\right]$$

$$\boxed{\text{velocidad media} = \bar{v} = 25\left[\frac{m}{s}\right]}$$

iii) El desplazamiento entre t_1 y t_2 esta dado por:

$$d = x(t_2) - x(t_1) = 100[\text{m}] - 25\ [\text{m}] = 75\ [\text{m}]$$

$$\boxed{\text{desplazamiento} = d = 75[\text{m}]}$$

iv) La velocidad media entre t_1 y t_2, esta dada por:

$$\bar{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d}{3[\text{s}] - 1[\text{s}]} = \frac{75[\text{m}]}{2[\text{s}]} = \tfrac{75}{2}\left[\tfrac{m}{s}\right] = 37.5\left[\tfrac{m}{s}\right]$$

$$\boxed{\text{velocidad media} = \bar{v} = 37.5\left[\frac{m}{s}\right]}$$

Problema 3.

Determine la velocidad y aceleración en función del tiempo de una partícula a partir de su posición en función del tiempo que esta dada por:

$$x(t) = \int_t^{t^2} e^{x^2} dx$$

Solución:

Tenemos que:

$x(t) = \int_t^{t^2} e^{x^2} dx$

Usando el teorema fundamental del cálculo tenemos que sea $F(u)$ tal que: $\dfrac{dF(u)}{du} = e^{u^2}$ entonces tenemos que:

$x(t) = F(t^2) - F(t)$

De este modo:

$$v(t) = \frac{d(x(t))}{dt} = \frac{d}{dt}\left[F(t^2) - F(t)\right] = \frac{dF(t^2)}{dt} - \frac{dF(t)}{dt} = \left(\frac{dF(t^2)}{d(t^2)}\right)\left(\frac{d(t^2)}{dt}\right) - \left(\frac{dF(t)}{dt}\right)$$

$$= 2t\left(\frac{dF(t^2)}{d(t^2)}\right) - \left(\frac{dF(t)}{dt}\right)$$

Ahora notemos que usando que: $\dfrac{dF(u)}{du} = e^{u^2}$, entonces:

$\dfrac{dF(t^2)}{d(t^2)} = \dfrac{dF(u)}{d(u)} = e^{u^2}$ si es que tomamos $u = t^2$. De este modo: $e^{u^2} = e^{t^4}$

De este modo:

$\dfrac{dF(t^2)}{d(t^2)} = e^{t^4}$

Ahora también tenemos que:

$$\frac{dF(t)}{dt} = e^{t^2}$$

De esta manera:

$$2t\left(\frac{dF(t^2)}{d(t^2)}\right) - \left(\frac{dF(t)}{dt}\right) = 2t \cdot e^{t^4} - e^{t^2}$$

Finalmente:

$$\boxed{v(t) = 2t \cdot e^{t^4} - e^{t^2}}$$

Ahora tenemos que:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2t \cdot e^{t^4} - e^{t^2}\right) = 2\frac{d}{dt}\left(t \cdot e^{t^4}\right) - \frac{d(e^{t^2})}{dt} = 2\left[\left(\frac{dt}{dt}\right)e^{t^4} + t \cdot \left(\frac{de^{t^4}}{dt}\right)\right] - \left(\frac{d(e^{t^2})}{d(t^2)}\right)\left(\frac{d(t^2)}{dt}\right)$$

$$= 2\left[e^{t^4} + t \cdot \left(\frac{d(e^{t^4})}{d(t^4)}\right)\left(\frac{d(t^4)}{dt}\right)\right] - 2t \cdot e^{t^2} = 2\left[e^{t^4} + t \cdot e^{t^4} 4t^3\right] - 2t \cdot e^{t^2} = 2 \cdot e^{t^4} + 8 \cdot t^4 e^{t^4} - 2t \cdot e^{t^2}$$

De este modo:

$$\boxed{a(t) = 2 \cdot e^{t^4} + 8 \cdot t^4 e^{t^4} - 2t \cdot e^{t^2}}$$

Problema 4.
Determine las ecuaciones de la aceleración, velocidad y posición para una partícula que se mueve con velocidad constante. Considere $t_0 = 0[\mathrm{s}]$, $x(t_0) = x_0$. Para esto recuerde que:

$$\boxed{a(t) = \frac{dv(t)}{dt}}$$

$$\boxed{x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(u)du}$$

Solución:

Como la velocidad es contante diremos que: $\boxed{v(t) = v}$. Ahora:

$a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt} = 0$. De este modo: $\boxed{a(t) = 0}$

Considerando que: $x(t_0) = x_0$, entonces tenemos que:

$$x(t) - x_0 = \int_0^t v(u)du = \int_0^t vdu = v\ u\Big]_0^t = vt$$

Así tenemos que: $x(t) - x_0 = vt$, por ende: $\boxed{x(t) = x_0 + vt}$

Problema 5.
Determine las ecuaciones de la aceleración, velocidad y posición para una partícula que se mueve con aceleración constante. Considere $t_0 = 0$[s], $x(t_0) = x_0$ y $v(t_0) = v_0$. Para esto recuerde que:

$$\boxed{v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^t a(u)du}$$

$$\boxed{x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t v(u)du}$$

Solución:

Sea $a(u) = a$ y como $v(t_0) = v_0$ y $t_0 = 0$ [s], entonces:

$$v(t) - v_0 = \int_0^t a\ du = a \cdot u\ ]_0^t = at$$

De este modo: $v(t) - v_0 = at$, y por ende: $\boxed{v(t) = at + v_0}$

Ahora como $x(t_0) = x_0$ y $t_0 = 0$[s], entonces:

$$x(t) - x_0 = \int_0^t v(u)du = \int_0^t (au + v_0)du = a\int_0^t u\ du + v_0 \int_0^t du = a \cdot \frac{u^2}{2}\Big]_0^t + v_0 \cdot u\Big]_0^t = a \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t$$

De este modo: $x(t) - x_0 = a\frac{t^2}{2} + v_0 t$ y por ende: $\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + a\dfrac{t^2}{2}}$

Problema 6.
Determine las ecuaciones de movimiento para una partícula que es lanzada hacia arriba desde la posición $y(t_0) = 0$ [m] en $t_0 = 0$[s] con una velocidad inicial $v(t_0) = v_0$.

Solución:

Notemos que este ejercicio se puede resolver de igual manera que el anterior, pero utilizaremos otros recursos. Primero notemos que la aceleración que esta actuando es la gravedad y actua hacia abajo en el eje Y. Además esta aceleración es constante y de magnitud g. Como esta aceleración es constante, entonces es igual a la aceleración media. De este modo:

$$-g = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{v(t) - v_0}{t}$$

De este modo: $v(t) - v_0 = -gt$, por ende: $\boxed{v(t) = v_0 - gt}$. Ahora usaremos que:

$$\boxed{y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(u)du}$$

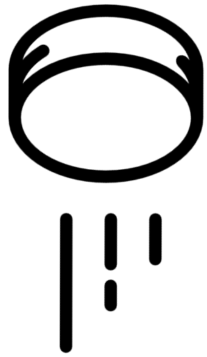
De este modo:

$$y(t) - y_0 = \int_0^t v(u)du = \int_0^t (v_0 - gu)du = \int_0^t v_0 \ du - g\int_0^t u \ du = v_0 u\Big]_0^t - g\frac{u^2}{2}\Big]_0^t = v_0 t - g\frac{t^2}{2}$$

Tenemos, así que: $y(t) - y_0 = v_0 t - g\frac{t^2}{2}$, y como $y_0 = 0$, entonces: $\boxed{y(t) = v_0 t - g\frac{t^2}{2}}$

Problema 7.
Considere el lanzamiento de una piedra hacia arriba con una velocidad inicial v_0, en $t_0 = 0$[s] desde $y(t_0) = 0$[m]

i) ¿Cual es la máxima altura que alcanza la piedra?
ii) ¿Cuanto tiempo transcurre desde que es lanzada la piedra hasta que alcanza la altura máxima?
iii) ¿Cuanto tiempo transcurre desde que alcanza la altura máxima, hasta volver al suelo?
iv) ¿Cuanto tiempo se demora desde que es lanzada hacia arriba hasta volver?



Solución:

i) Recordemos que la altura en función del tiempo es:

$$y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

De este modo: $y'(t) = v_0 - gt$

Ahora los puntos críticos de $y(t)$, son aquellos puntos t^* tales que: $y'(t^*) = 0$

Ahora resolvemos $y'(t^*) = v_0 - gt^* = 0$

Así tenemos que el único punto critico es $t^* = \dfrac{v_0}{g}$

Ahora notemos que: $y''(t) = -g$, por lo tanto: $y''(t^*) = -g$. Así el punto critico $t^* = \dfrac{v_0}{g}$ corresponde a un máximo local.

Como $y(t) = \left[v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}\right] \to -\infty$, cuando $t \to \infty$, y además

$y(t) = \left[v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}\right] \to -\infty$, cuando $t \to -\infty$

Entonces el punto t^* corresponde a un máximo global. De este modo:

$$h_{max} = y(t^*) = y\left(\frac{v_0}{g}\right) = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0}{g}\right) = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Finalmente:

$$\boxed{h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}}$$

Otra forma de solucionarlo: Notemos que $y(t) = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$ es una parabola. Recordemos que una parabola de la forma $y(t) = at^2 + bt + c$, con $a < 0$ tiene su punto máximo en $t = -\dfrac{b}{2a}$. Ahora para $y(t) = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$ tenemos que $a = -\dfrac{g}{2} < 0$, $b = v_0$, por lo tanto, en $t^* = \dfrac{-v_0}{-g} = \dfrac{v_0}{g}$, se da el valor máximo. De este modo:

$$h_{max} = y(t^*) = y\left(\frac{v_0}{g}\right) = v_0\frac{v_0}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0}{g}\right) = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Finalmente:

$$\boxed{h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}}$$

Así obtuvimos la misma respuesta de las dos formas.

ii) Notemos que el tiempo que la piedra se demora en alcanzar la altura máxima, es el mismo tiempo t^* calculado en **i)**. Por lo tanto, el tiempo que se demora la piedra en alcanzar su altura máxima es:

$$\boxed{t^* = \frac{v_0}{g}}$$

iii) Notemos que sea t_2 el tiempo que se demora la piedra desde que es lanzada a volver al suelo, entonces el tiempo que se demora la piedra desde que alcanza su altura máxima a volver al suelo es $t_2 - t^*$ y como ya tenemos t^*, entonces procederemos a calcular t_2. Notemos que t_2 debe cumplir que: $y(t_2) = 0$ con $t_2 \neq 0$, pues sabemos que $y(0) = 0$, y los que nosotros buscamos es un tiempo distinto al inicial (distinto a cero).

De este modo:

$y(t_2) = -\dfrac{g}{2}(t_2)^2 + v_0(t_2) = t_2\left[-g\dfrac{t_2}{2} + v_0\right] = 0$. Como $t_2 \neq 0$, entonces:

$-g\dfrac{t_2}{2} + v_0 = 0$, por ende: $t_2 = \dfrac{2v_0}{g}$

Así tenemos que:

$$t_2 - t^* = \frac{2v_0}{g} - \frac{v_0}{g} = \frac{v_0}{g}$$

Finalmente, tenemos que el tiempo que se demora la piedra desde que alcanza la altura máxima hasta volver al suelo es:

$$\boxed{t_2 - t^* = \frac{v_0}{g}}$$

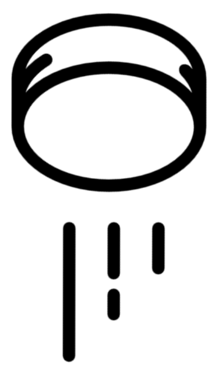
Es importante notar que el tiempo que se demora la piedra desde que es lanzada hasta alcanzar su altura máxima es el mismo que se demora la piedra desde que alcanza su altura máxima hasta volver al suelo.

iv) Notemos que el tiempo que transcurre desde que es lanzada la piedra hasta volver al suelo ya fue calculado y corresponde a:

$$\boxed{t_2 = \frac{2v_0}{g}}$$

Problema 8.
Rodrigo es un estudiante muy alto, quien quiere lanzar una piedra desde el piso y que esta alcance 45 [m]. Considere $g = 9,81 \left[\frac{m}{s^2}\right]$. A partir de esto responda las siguientes preguntas:

i) ¿Cual es la minima velocidad inicial con la que debe ser lanzada la piedra para alcanzar los 45[m]
ii) ¿Cuanto tiempo se demora la piedra en alcanzar los 45[m].



Solución:

i) Notemos que la mínima velocidad con la que se debe lanzar la piedra para alcanzar una altura de 45[m] es igual a la velocidad inicial necesaria para que al lanzar la piedra su altura máxima sea 45[m]. Y como sabemos que: $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$, entonces: $v_0^2 = 2gh_{max}$, así: $v_0 = \pm\sqrt{2gh_{max}}$, y como $v_0 > 0$, entonces: $v_0 = \sqrt{2gh_{max}}$. Usando los datos del problema tenemos que:

$$v_0 = \sqrt{2gh_{max}} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 45}\left[\frac{m}{s}\right] = 29,71\left[\frac{m}{s}\right]$$

Finalmente:

$$\boxed{v_0 = 29,71 \left[\frac{m}{s}\right]}$$

ii) Recordemos que el tiempo que se demora en alcanzar la altura máxima es:

$$t^* = \frac{v_0}{g}$$

Usando los datos del problema, tenemos que:

$$t^* = \frac{v_0}{g} = \frac{29,71 \left[\frac{m}{s}\right]}{9,81 \left[\frac{m}{s^2}\right]} = 3,03[s]$$

Por lo tanto, el tiempo que se demora la piedra en alcanzar los 45[m] es:

$$\boxed{t^* = 3,03[s]}$$

Problema 9.
La aceleración de una partícula en función del tiempo es: $a(t) = t$. A partir de esto, encuentre la función de la velocidad y de la posición en función del tiempo si sabemos que: $v(1) = 3\left[\frac{m}{s}\right]$, y que: $x(2) = 2[m]$.

Solución:

Recordemos que para encontrar la velocidad en función del tiempo tenemos que usar que:

$$v(t) - v(1) = \int_1^t a(u)du = \int_1^t udu = \frac{u^2}{2}\Big]_1^t = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{t^2-1}{2}$$

Y como $v(1) = 3$, entonces: $v(t) = \dfrac{t^2-1}{2} + v(1) = \dfrac{t^2-1}{2} + 3 = \dfrac{t^2-1}{2} + \dfrac{6}{2} = \dfrac{t^2+5}{2}$

De este modo, la velocidad en función del tiempo $v(t)$ es:

$$\boxed{v(t) = \frac{t^2+5}{2}}$$

Ahora para encontrar la posición en función del tiempo tenemos que usar que:

$$x(t) - x(2) = \int_2^t v(u)du = \int_2^t \left(\frac{u^2+5}{2}\right) du = \int_2^t \frac{u^2}{2}du + \int_2^t \frac{5}{2}du = \frac{u^3}{6}\Big]_2^t + \frac{5}{2}\,u\Big]_2^t = \frac{t^3}{6} - \frac{2^3}{6} + \frac{5}{2}\,t - \frac{5}{2}\,2$$

$$= \frac{t^3}{6} - \frac{8}{6} + \frac{15t}{6} - \frac{30}{6} = \frac{t^3 + 15t - 38}{6}$$

De este modo: $x(t) - x(2) = \dfrac{t^3 + 15t - 38}{6}$ y como $x(2) = 2$, entonces:

$$x(t) = \frac{t^3 + 15t - 38}{6} + x(2) = \frac{t^3 + 15t - 38}{6} + 2 = \frac{t^3 + 15t - 38}{6} + \frac{12}{6} = \frac{t^3 + 15t - 26}{6}$$

De este modo, la posición en función del tiempo $x(t)$ es:

$$\boxed{x(t) = \frac{t^3 + 15t - 26}{6}}$$

Problema 10.
La velocidad de una particula en función del tiempo es: $v(t) = e^{-t}t$. Encuentre su aceleración y posición en función del tiempo si sabemos que $x(0) = 0$.

Solución:

Para encontrar la posición en función del tiempo tenemos que usar que:

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v(u)du = \int_0^t e^{-u}u \; du$$

Ahora esta integral, la podemos resolver por partes. Sea $f(u) = u \;\Rightarrow\; f'(u) = 1$ y $g'(u) = e^{-u} \;\Rightarrow\; g(u) = -e^{-u}$

$$\int_0^t e^{-u}u \; du = -ue^{-u}\Big]_0^t - \int_0^t -e^{-u} \; du = -te^{-t} + 0 \cdot e^{-0} + \int_0^t e^{-u} \; du = -te^{-t} - e^{-u}\Big]_0^t = -te^{-t} - e^{-t} + 1$$

Como $x(0) = 0$, entonces tenemos que la posición en función del tiempo $x(t)$ es:

$$\boxed{x(t) = -te^{-t} - e^{-t} + 1}$$

Ahora para obtener la aceleración en función del tiempo tenemos que usar que:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d(e^{-t}t)}{dt} = \frac{d(e^{-t})}{dt} \cdot t + e^{-t}\frac{dt}{dt} = -e^{-t}t + e^{-t} = e^{-t}(1-t)$$

De este modo, la aceleración en función del tiempo $a(t)$ es:

$$\boxed{a(t) = e^{-t}(1-t)}$$

Problema 11.
Considere una partícula la cual su posición en función del tiempo esta determinada por: $x(t) = A \cdot cos(\omega t + \phi)$, donde ω y ϕ son constantes. Determine la velocidad en función del tiempo $v(t)$ y la aceleración en función del tiempo $a(t)$.

Solución:

Para calcular la velocidad en función del tiempo $v(t)$ debemos usar que:

$$v(t) = \frac{d[x(t)]}{dt} = \frac{d[A \cdot cos(\omega t + \phi)]}{dt} = A \cdot \frac{d[cos(\omega t + \phi)]}{dt} = A \cdot \frac{d[cos(\omega t + \phi)]}{d(\omega t + \phi)}\frac{d(\omega t + \phi)}{dt} = -A \cdot sin(\omega t + \phi)\omega$$

Así tenemos que la velocidad en función del tiempo $v(t)$ es:

$$\boxed{v(t) = -A\omega \cdot sin(\omega t + \phi)}$$

Ahora para calcular la aceleración en función del tiempo $a(t)$ debemos usar que:

$$a(t) = \frac{d[v(t)]}{dt} = \frac{d[-A\omega \cdot sin(\omega t + \phi)]}{dt} = -A\omega \cdot \frac{d[sin(\omega t + \phi)]}{dt} = -A\omega \cdot \frac{d[sin(\omega t + \phi)]}{d(\omega t + \phi)}\frac{d(\omega t + \phi)}{dt}$$

$$= -A\omega \cdot cos(\omega t + \phi)\omega = -A\omega^2 \cdot cos(\omega t + \phi)$$

Así tenemos que la aceleración en función del tiempo $a(t)$ es:

$$\boxed{a(t) = -A\omega^2 \cdot cos(\omega t + \phi)}$$

Problema 12.
Considere una partícula, la cual su velocidad en función de la posición esta dada por:

$$v(x) = \sqrt{R^2 + x^2}$$

Determine la aceleración en función de su posición.

Solución:

Recordando la definición de aceleración y velocidad, y usando la regla de la cadena tenemos que:

$$a = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dx}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right) \cdot v$$

Notemos que:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(\sqrt{x^2 + R^2}) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + R^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

De este modo:

$$a(x) = \left(\frac{dv}{dx}\right) \cdot v = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \cdot \sqrt{x^2 + R^2} = x$$

Así tenemos que la aceleración en función de la posición esta dada por:

$$a(x) = x$$

Problema 13.
Considere una partícula que se esta moviendo tridimensionalmente. Su movimiento se describe en coordenadas polares de la siguiente manera:

$$r(t) = \rho \cdot \hat{\rho} + z \cdot \hat{k}$$

con $\rho(t) = \dfrac{A}{(t+1)}$, $\quad \theta(t) = B \cdot t \quad$ y $\quad z(t) = \dfrac{C \cdot t}{(t+1)}$

Determine la velocidad y la aceleración cuando $t = 0$, y cuando $t \to \infty$. Asuma que A, B, C son constantes.

Solución:

Recordemos que en coordenadas cilíndricas:

$$v\vec{(t)} = \dot{\rho} \cdot \hat{\rho} + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{\theta} + \dot{z} \cdot \hat{k}$$

$$\vec{a(t)} = [\ddot{\rho} - \rho \cdot \dot{\theta}^2] \cdot \hat{\rho} + [2 \cdot \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta}] \cdot \hat{\theta} + \ddot{z} \cdot \hat{k}$$

Ahora:

$\rho = \dfrac{A}{(t+1)} \Rightarrow \dot{\rho} = -\dfrac{A}{(t+1)^2} \Rightarrow \ddot{\rho} = \dfrac{2A}{(t+1)^3}$

$\theta = B \cdot t \Rightarrow \dot{\theta} = B \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

$z = C\dfrac{t}{t+1} = C\dfrac{(t+1-1)}{t+1} = C \cdot \left[1 - \dfrac{1}{(t+1)}\right] \Rightarrow \dot{z} = \dfrac{C}{(t+1)^2} \Rightarrow \ddot{z} = -\dfrac{2C}{(t+1)^3}$

Ahora tenemos que:

$$\vec{v(0)} = \dot{\rho}(0) \cdot \hat{\rho}(0) + \rho(0) \cdot \dot{\theta}(0) \cdot \hat{\theta}(0) + \dot{z}(0) \cdot \hat{k}$$

$$\vec{a(0)} = [\ddot{\rho}(0) - \rho(0) \cdot \dot{\theta}(0)^2] \cdot \hat{\rho}(0) + [2 \cdot \dot{\rho}(0) \cdot \dot{\theta}(0) + \rho(0) \cdot \ddot{\theta}(0)] \cdot \hat{\theta}(0) + \ddot{z}(0) \cdot \hat{k}$$

Ahora notemos que:

$\rho(0) = A, \quad \dot{\rho}(0) = -A, \quad \ddot{\rho}(0) = 2A$

$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = B, \quad \ddot{\theta}(0) = 0$

$z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = C, \quad \ddot{z}(0) = -2C$

$\hat{\rho}(0) = [cos(\theta(0)), sin(\theta(0))] = [cos(0), sin(0)] = (1,0) = \hat{i}$

$\hat{\theta}(0) = [-sin(\theta(0)), cos(\theta(0))] = [-sin(0), cos(0)] = (0,1) = \hat{j}$

De este modo:

$$\boxed{\vec{v(0)} = -A \cdot \hat{i} + AB \cdot \hat{j} + C \cdot \hat{k}}$$

$$\boxed{\vec{a(0)} = [2A - AB^2] \cdot \hat{i} - 2AB \cdot \hat{j} - 2C \cdot \hat{k}}$$

Ahora también notemos que cuando $t \to \infty$

$\rho = 0, \quad \dot{\rho} = 0, \quad \ddot{\rho} = 0$

$\dot{\theta} = B, \quad \ddot{\theta} = 0$

$\dot{z} = 0, \quad \ddot{z} = 0$

Así de este modo, cuando $t \to \infty$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{0}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{0}}$$

Problema 14.
Un auto parte del reposo y viaja en una linea recta tal que acelera a una razón constante $a_1 = 10 \left[\frac{m}{s^2}\right]$ por $10[s]$. Luego desacelera a una razón constante de $a_2 = -2 \left[\frac{m}{s^2}\right]$. Calcule el tiempo que se demora en frenar el auto desde que comienza a desacelerar.

Solución:
Desde $t = 0[s]$, hasta $t = 10[s]$, la velocidad en función del tiempo esta dada por:

$v(t) = v_0 + a \cdot t = 10 \cdot t$

Por lo tanto, a los 10 segundos su velocidad esta dada por $v(10) = 10 \cdot 10 = 100$.

Consideremos como $t = 0[s]$, a este instante. De este modo, la velocidad en función del tiempo esta dada por:

$v(t) = v_0 + a \cdot t = 100 - 2 \cdot t$

Sea t' el tiempo en que el auto frena, entonces $v(t') = 0$. De este modo:

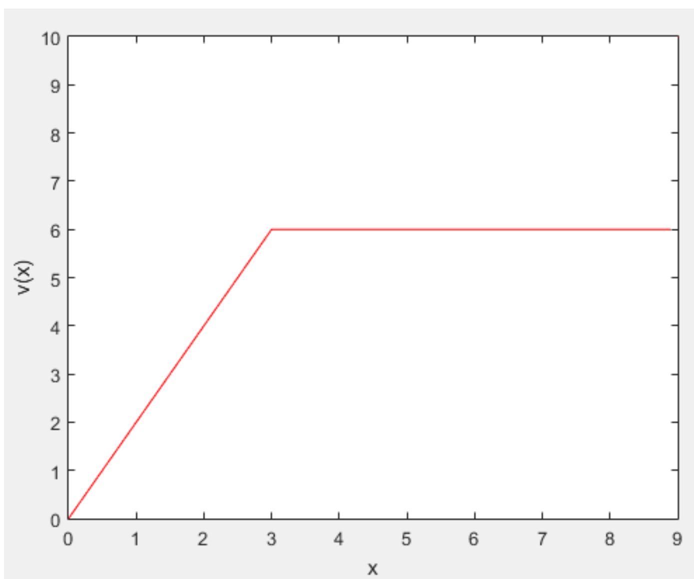
$0 = v(t') = 100 - 2 \cdot t'$

De este modo:

$t' = 50$

Así, tenemos que el auto demora 50 segundos en detenerse desde que comienza a frenar.

Problema 15.
Considere el siguiente gráfico que muestra la velocidad en función de la posición. Calcule la aceleración en función de la posición.



Solución:
Recordando la definición de aceleración y de velocidad, y además usando la regla de la cadena, tenemos que:

$$a(x) = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dx}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right) \cdot v$$

Notemos que para $x \in [0, 3]$, $v(x) = 2 \cdot x$, por lo tanto: $\dfrac{dv}{dx} = 2$, entonces:

$$a(x) = \left(\frac{dv}{dx}\right) \cdot v = 2 \cdot 2 \cdot x = 4 \cdot x$$

Ahora notemos que para $x \in (3, \infty)$, tenemos que $v(x) = 6$, por lo tanto: $\dfrac{dv}{dx} = 0$, entonces:

$$a(x) = \left(\frac{dv}{dx}\right) \cdot v = 0 \cdot 6 = 0$$

Así finalmente tenemos que:

$$a(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x \in [0, 3] \\ 0 & \text{si } x \in (3, \infty) \end{cases}$$

Problema 16.
Considere un cuerpo que se mueve con una aceleración constante a, y que comienza con una aceleración v_0 en la posición x_0. Encuentre una relación entre $x(t), x_0, a, v_0$ y v_0 que no involucre al tiempo.

Solución:
Consideremos las ecuaciones para la posición en función del tiempo y la velocidad en función del tiempo para un partícula que se mueve con aceleración constante.

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

De este modo, tenemos que:

$v(t) - v_0 = a \cdot t \ \Rightarrow\ \frac{v(t) - v_0}{a} = t$

Ahora, reemplazando este valor de t en la función $x(t)$, tenemos que:

$x(t) = x_0 + v_0 \cdot \left(\frac{v(t)-v_0}{a}\right) + \dfrac{a}{2} \cdot \left(\frac{v(t)-v_0}{a}\right)^2 = x_0 + \frac{v_0 \cdot v(t) - v_0^2}{a} + \frac{v(t)^2 - 2v(t)v_0 + v_0^2}{2a} = x_0 + \frac{2v_0 \cdot v(t) - 2v_0^2}{2a} + \frac{v(t)^2 - 2v(t)v_0 + v_0^2}{2a}$
$= x_0 + \frac{v(t)^2 - v_0^2}{2a}$

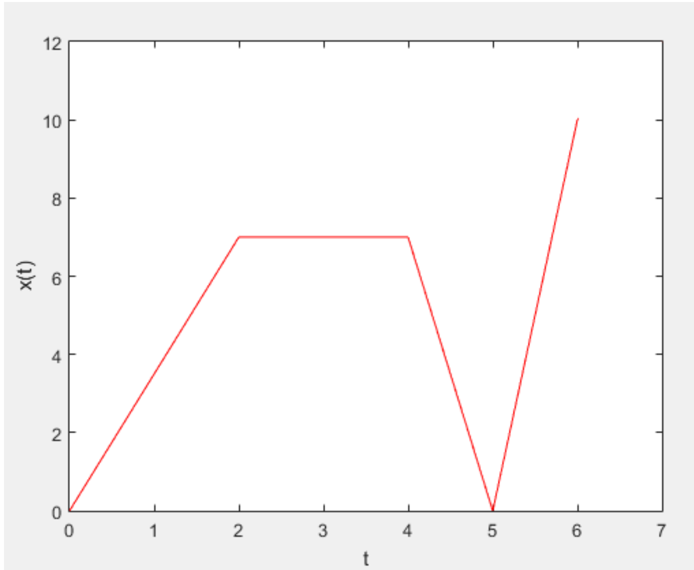
Así tenemos que:

$x(t) = x_0 + \frac{v(t)^2 - v_0^2}{2a} \ \Rightarrow\ 2 \cdot a \cdot (x(t) - x_0) = v(t)^2 - v_0^2$

Por lo tanto, la relación entre $x(t), x_0, a, v_0$ y $v(t)$, que no involucra al tiempo es:

$$\boxed{2 \cdot a \cdot (x(t) - x_0) = v(t)^2 - v_0^2}$$

Problema 17.
Considere el siguiente gráfico de la posición en función del tiempo. Calcula la velocidad en función del tiempo.



Solución:

Notemos que $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$, por lo tanto, la velocidad sería la pendiente del gráfico mostrado.

Desde $t = 0$ a $t = 2$, el gráfico tiene una pendiente de $\frac{7}{2}$.

Desde $t = 2$ a $t = 4$, el gráfico tiene una pendiente de 0.

Desde $t = 4$ a $t = 5$, el gráfico tiene una pendiente de $\frac{-7}{1} = -7$

Desde $t = 5$ a $t = 6$, el gráfico tiene una pendiente de $\frac{10}{1} = 10$

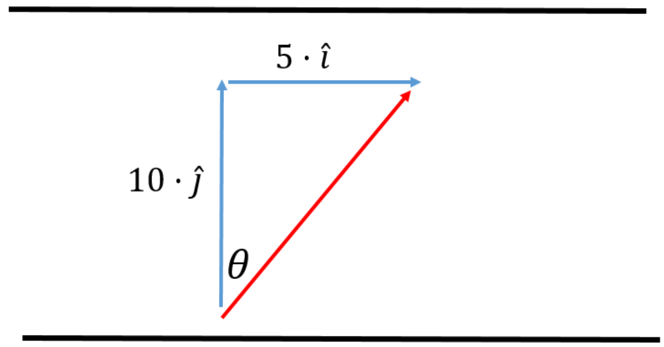
De este modo, la velocidad en función del tiempo es:

$$v(t) = \begin{cases} 3.5 & \text{si } t \in (0,2) \\ 0 & \text{si } t \in (2,4) \\ -7 & \text{si } t \in (4,5) \\ -10 & \text{si } t \in (5,6) \end{cases}$$

Notemos que en $t = 0, 2, 4, 5, 6$ no esta definida la velocidad, pues la pendiente en el gráfico no esta definida.

Problema 18.

Considere un bote que va navegando hacia el norte con velocidad de 10 $\left[\frac{m}{s}\right]$ en un rio, y además considere que el agua del rio se mueve hacia el este con una velocidad de 5 $\left[\frac{m}{s}\right]$. Determine cual es la velocidad del barco para un espectador que se encuentra a la orilla del rio y su magnitud. Además note que para el espectador el barco va formando un angulo θ con respecto al eje Y, determine ese angulo θ



Solución:
Notemos que la velocidad del bote es: $\vec{v}_B = 10 \cdot \hat{j}$, y que la velocidad del agua del rio es $\vec{v}_R = 5 \cdot \hat{i}$. De este modo, la velocidad del bote respecto al espectador es:

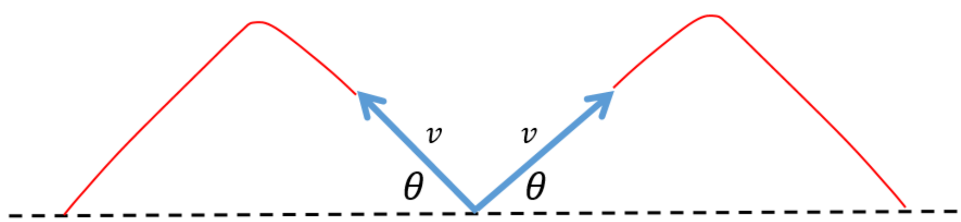
$$\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{v}_R = 5 \cdot \hat{i} + 10 \cdot \hat{j}$$

La magnitud de este velocidad es:

$\|\vec{v}\| = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{25 + 100} = \sqrt{125}$

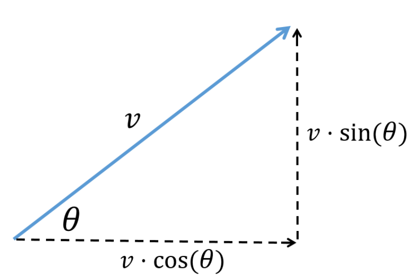
Ahora para determinar el angulo θ consideraremos el triángulo rectángulo asociado. Así tenemos que: $tan(\theta) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

Problema 19.
Dos pelotas se lanzan desde un mismo punto, una hacia la derecha con una velocidad v formando un angulo θ y la otra hacia la izquierda con una velocidad v formando un angulo θ. De una formula para la distancia entre las dos pelotas en función del tiempo.



Solución:
Consideremos al origen como el punto de donde se lanzan las pelotas. Ahora calcularemos la ecuación de movimiento en el eje X para ambas pelotas. Partiremos con la pelota que se lanza hacia la derecha.

Primero descompondremos la velocidad:

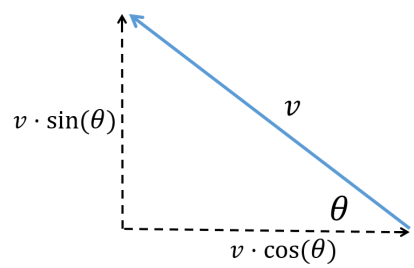


Ahora como la única aceleración que esta actuando es la gravedad, entonces:

$$x_1(t) = v \cdot cos(\theta) \cdot t$$

Ahora analizaremos el caso en que la pelota se lanza hacia la izquierda.

Primero descompondremos la velocidad:



Ahora la ecuación para el movimiento en el eje X para la pelota que se lanza hacia la izquierda es:

$$x_2(t) = -v \cdot cos(\theta) \cdot t$$

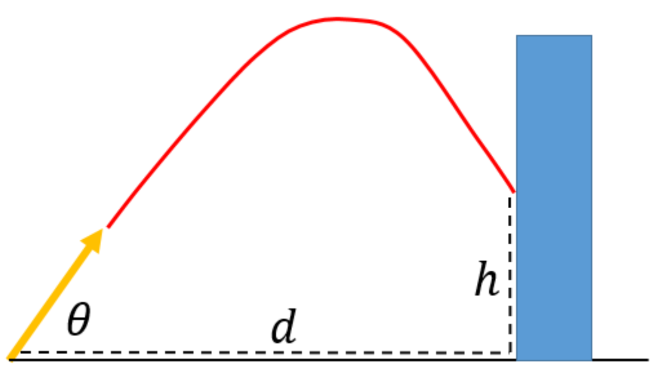
Ahora notemos que la distancia entre ambas pelotas en función del tiempo esta dada por:

$$d(t) = x_1(t) - x_2(t) = v \cdot cos(\theta) \cdot t - (-v \cdot cos(\theta) \cdot t) = 2 \cdot v \cdot cos(\theta) \cdot t$$

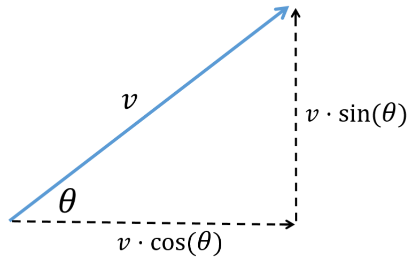
Finalmente, la distancia en función del tiempo es:

$$\boxed{d(t) = 2 \cdot v \cdot cos(\theta) \cdot t}$$

Problema 20.
Considere un bombero que quiere apagar un incendio en un edificio que se encuentra a una distancia d del bombero. El bombero lanza el agua con un angulo θ y así logra apagar el incendio. Determine la altura h en donde se encontraba el incendio.



Solución:
Primero descompondremos la velocidad:



Si consideramos como el origen al punto de donde sale el agua, y considerando que la única aceleración actuando es la gravedad, entonces las ecuaciones del movimiento para la primera gota de agua que cae en el incendio es:

$$x(t) = v \cdot cos(\theta) \cdot t$$
$$y(t) = v \cdot sin(\theta) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Sea t' el instante en que la primera gota cae en el incendio, entonces tenemos que $x(t') = d$ y que $y(t') = h$. Despejaremos t' usando que $x(t') = d$. De este modo:

$$d = x(t') = v \cdot cos(\theta) \cdot t'$$

De este modo:

$$t' = \frac{d}{v \cdot cos(\theta)}$$

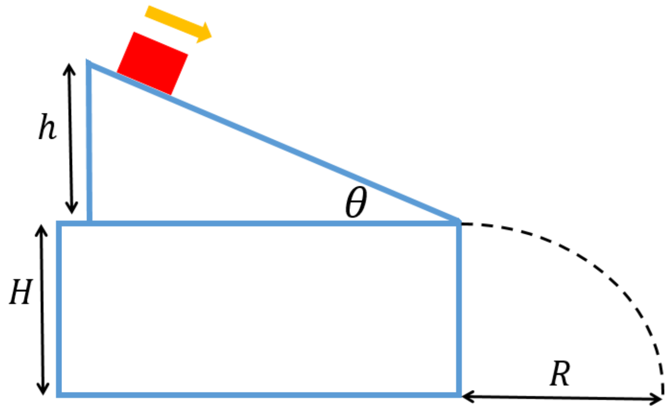
Y como $h = y(t')$, entonces:

$$h = y(t') = v \cdot sin(\theta) \cdot \left(\frac{d}{v \cdot cos(\theta)}\right) - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{d}{v \cdot cos(\theta)}\right)^2 = tan(\theta) \cdot d - \frac{g}{2} \cdot \frac{d^2}{v^2 \cdot cos^2(\theta)}$$

Así tenemos que:

$$\boxed{h = tan(\theta) \cdot d - \frac{g}{2} \cdot \frac{d^2}{v^2 \cdot cos^2(\theta)}}$$

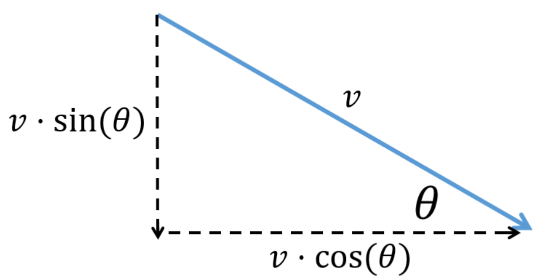
Problema 21.
Considere un bloque de masa m que cae por una pendiente como se muestra en la figura. Cuando el bloque se despega de la pendiente lleva una velocidad de $v = \sqrt{2gh}$.



¿Cuanto tiempo transcurre desde que sale el bloque de la pendiente hasta que toca el suelo?

Solución:

Calcularemos las ecuaciones de movimiento para el bloque una vez que se despega de la pendiente. Lo primero que haremos será descomponer la velocidad una vez que el bloque se despega de la pendiente, considerando que la pendiente tiene un angulo θ.



Ahora considerando como el punto en donde el bloque se despega de la pendiente como el origen de nuestro sistema, y además como la única aceleración actuando es la gravedad, entonces las ecuaciones de movimiento son:

$$x(t) = v \cdot cos(\theta) \cdot t$$

$$y(t) = H - v \cdot sin(\theta) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Ahora, sea t' el momento en que el bloque toca el suelo, entonces sabemos que $y(t') = 0$. Por lo tanto, nos preocuparemos en determinar t' utilizando que esta ecuación.

$0 = y(t') = H - v \cdot sin(\theta) \cdot (t') - \frac{g}{2} \cdot (t')^2$

De este modo:

$H - v \cdot sin(\theta) \cdot (t') - \frac{g}{2} \cdot (t')^2 = 0$

Resolveremos usando la ecuación cuadrática. De este modo:

$$t'_{1,2} = \frac{v \cdot sin(\theta) \pm \sqrt{v^2 sin^2(\theta) + 2gH}}{-g} = \frac{-v \cdot sin(\theta) \pm \sqrt{v^2 sin^2(\theta) + 2gH}}{g}$$

Así notamos que:

$t'_1 = \frac{-v \cdot sin(\theta) - \sqrt{v^2 sin^2(\theta) + 2gH}}{g}$ $\quad$ $t'_2 = \frac{-v \cdot sin(\theta) + \sqrt{v^2 sin^2(\theta) + 2gH}}{g}$

Como $t' > 0$, entonces descartamos t'_1, de este modo:

$$t' = \frac{\sqrt{v^2 sin^2(\theta) + 2gH} - v \cdot sin(\theta)}{g} = \frac{v \cdot sin(\theta)}{g} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{2gH}{v^2 \cdot sin^2(\theta)}} - 1\right]$$

Ahora recordando que $v = \sqrt{2gh}$, entonces $v^2 = 2gh$. De este modo:

$$t' = \frac{v \cdot sin(\theta)}{g} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{2gH}{2gh \cdot sin^2(\theta)}} - 1\right] = \frac{v \cdot sin(\theta)}{g} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{H}{h \cdot sin^2(\theta)}} - 1\right]$$

Así, el tiempo en que se demora el bloque en tocar el suelo es:

$$\boxed{t' = \frac{v \cdot sin(\theta)}{g} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{H}{h \cdot sin^2(\theta)}} - 1\right]}$$

Problema 22.

Considere el mismo problema estudiado en la pregunta anterior. ¿Cuanto vale R?

Solución:

Ahora notemos que sea t' el momento en que la particula toca el suelo, entonces $x(t') = R$. Así podemos determinar R, utilizando el t' determinado anteriormente. De este modo:

$$R = x(t') = v \cdot cos(\theta) \cdot t' = v \cdot cos(\theta) \cdot \frac{v \cdot sin(\theta)}{g} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{H}{h \cdot sin^2(\theta)}} - 1\right] = \frac{v^2 \cdot cos(\theta) \cdot sin(\theta)}{g} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{H}{h \cdot sin^2(\theta)}} - 1\right]$$

Recordando que $v^2 = 2gh$, y tambien que $2 \cdot sin(\theta) \cdot cos(\theta) = sin(2\theta)$, entonces tenemos que:

$$R = \frac{v^2 \cdot cos(\theta) \cdot sin(\theta)}{g} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{H}{h \cdot sin^2(\theta)}} - 1\right] = \frac{2gh \cdot cos(\theta) \cdot sin(\theta)}{g} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{H}{h \cdot sin^2(\theta)}} - 1\right]$$

$$= h \cdot 2 \cdot cos(\theta) \cdot sin(\theta) \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{H}{h \cdot sin^2(\theta)}} - 1\right] = h \cdot sin(2\theta) \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{H}{h \cdot sin^2(\theta)}} - 1\right]$$

Así finalmente tenemos que:

$$\boxed{R = sin(2\theta) \cdot h \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{H}{h \cdot sin^2(\theta)}} - 1 \right]}$$

Problema 23.

Considere nuevamente el caso estudiado en la pregunta anterior. De una aproximación de cuanto vale R y t' si $h >> H$

Solución:

Recordemos que:

$$R = sin(2\theta) \cdot h \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{H}{h \cdot sin^2(\theta)}} - 1 \right]$$

$$t' = \frac{v \cdot sin(\theta)}{g} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{H}{h \cdot sin^2(\theta)}} - 1 \right]$$

Ahora notemos que ambas expresiones involucra el termino: $\left[\sqrt{1 + \frac{H}{h \cdot sin^2(\theta)}} - 1 \right]$

Ahora lo que haremos será hacer una aproximación de Taylor de grado 1 de la expresión $\sqrt{1 + \frac{H}{h \cdot sin^2(\theta)}}$

Sea $f(x) = \sqrt{1+x}$ con $x = \frac{H}{h \cdot sin^2(\theta)}$. Como $h >> H$, entonces: $x = \frac{H}{h \cdot sin^2(\theta)} << 1$. De este modo, como $x << 1$, haremos una aproximación en torno a $x = 0$.

La aproximación de Taylor esta dada por:

$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x$

Notemos que como $f(x) = \sqrt{1+x} \ \Rightarrow \ f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+x}}$. Así: $f(0) = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$, y $f'(0) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$.

De este modo:

$\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{1}{2} \cdot x$

Recordemos que esta aproximación es valida solo cuando $x \approx 0$ y como $0 < x << 1$, entonces es valida. Reemplazando con $x = \frac{H}{h \cdot sin^2(\theta)}$, entonces tenemos que:

$$\sqrt{1 + \frac{H}{h \cdot sin^2(\theta)}} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{h \cdot sin^2(\theta)} \right)$$

De este modo:

$$\sqrt{1 + \frac{H}{h \cdot sin^2(\theta)}} - 1 \approx \frac{1}{2} \left(\frac{H}{h \cdot sin^2(\theta)} \right)$$

Así tenemos que:

$$R = sin(2\theta)\cdot h\cdot\left[\sqrt{1+\frac{H}{h\cdot sin^2(\theta)}}-1\right] \approx sin(2\theta)\cdot h\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{H}{h\cdot sin^2(\theta)}\right)$$

Recordando que: $2\cdot sin(\theta)\cdot cos(\theta) = sin(2\theta)$

$$R \approx sin(2\theta)\cdot h\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{H}{h\cdot sin^2(\theta)}\right) = 2sin(\theta)cos(\theta)\cdot h\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{H}{h\cdot sin^2(\theta)}\right) = \frac{H\cdot cos(\theta)}{sin(\theta)} = H\cdot cot(\theta)$$

Finalmente tenemos que:

$$\boxed{R \approx H\cdot cot(\theta)}$$

Notemos que esta aproximación es el mismo valor que hubiera tenido R, si es que el bloque hubiera seguido la misma dirección que traía en la pendiente.

También notemos que:

$$t' = \frac{v\cdot sin(\theta)}{g}\cdot\left[\sqrt{1+\frac{H}{h\cdot sin^2(\theta)}}-1\right] = \frac{\sqrt{2gh}\cdot sin(\theta)}{g}\cdot\left[\sqrt{1+\frac{H}{h\cdot sin^2(\theta)}}-1\right] \approx \frac{\sqrt{2gh}\cdot sin(\theta)}{g}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{H}{h\cdot sin^2(\theta)}\right)$$

$$= \frac{H}{\sqrt{2gh}\cdot sin(\theta)} = \frac{H}{v\cdot sin(\theta)}$$

Así finalmente tenemos que:

$$\boxed{t' \approx \frac{H}{v\cdot sin(\theta)}}$$

Problema 24.
La aceleración de una partícula esta definida por la relación: $a = -60x^{-1.5}$ donde a y x se expresan en $\frac{m}{s^2}$ y m respectivamente. Si se sabe que la velocidad en $x = 4$ es nula, determine la velocidad cuando:

a. $x = 2m$

b. $x = 1m$

c. $x = 100mm$

Solución:

Recordando la definición de aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Ahora utilizando la regla de la cadena tenemos que:

$$a = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

Ahora recordando la definición de velocidad que nos dice que:

$v = \dfrac{dx}{dt}$

Entonces tenemos que:

$a = \left(\dfrac{dv}{dx}\right)\left(\dfrac{dx}{dt}\right) = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)\left(\dfrac{dv}{dx}\right) = v \cdot \dfrac{dv}{dx}$

Así obtenemos la siguiente relación:

$a = v \cdot \dfrac{dv}{dx}$

Recordando que:

$a = -60x^{-1.5}$

Entonces tenemos que:

$-60x^{-1.5} = v \cdot \dfrac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad -60x^{-1.5}dx = vdv$

Recordando que $v(x = 4) = 0$, entonces tenemos que:

$$\int_4^x -60u^{-1.5}du = \int_0^v b\ db$$

De este modo:

$$\left.\frac{-60u^{-0.5}}{-0.5}\right]_4^x = \left.\frac{b^2}{2}\right]_0^v$$

$$\frac{120}{\sqrt{x}} - \frac{120}{\sqrt{4}} = \frac{v^2}{2}$$

Así tenemos que:

$$v(x)^2 = \frac{240}{\sqrt{x}} - 120$$

a. Para $x = 2m$ tenemos que:

$$v(2)^2 = \frac{240}{\sqrt{2}} - 120 = \frac{240}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - 120 = \frac{240}{2}\sqrt{2} - 120 = 120\sqrt{2} - 120 = 120[\sqrt{2} - 1]$$

Se puede observar que hay dos velocidades cuando $x = 2m$, esto significa que la partícula pasa 2 veces por $x = 2m$, por ello la existencia de dos velocidades. De este modo:

$\boxed{v_1(2) = \sqrt{120[\sqrt{2} - 1]}}$ $\boxed{v_2(2) = -\sqrt{120[\sqrt{2} - 1]}}$

b. Para $x = 1m$ tenemos que:

$$v(1)^2 = \frac{240}{\sqrt{1}} - 120 = 240 - 120 = 120$$

Como se observa, existen dos velocidades por la misma razón que el caso anterior. Así tenemos que:

$\boxed{v_1(2) = \sqrt{120}}$ $\boxed{v_2(2) = -\sqrt{120}}$

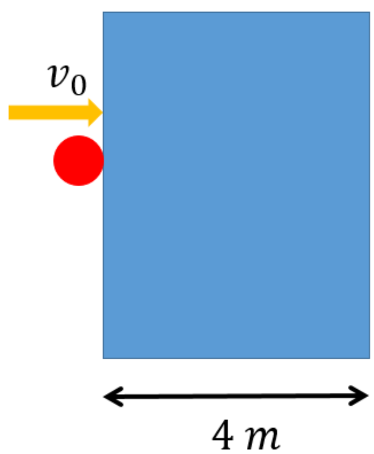
c. Para $x = 100mm = 0.1m$ tenemos que:

$$v(0.1)^2 = \frac{240}{\sqrt{0.1}} - 120 = \frac{240}{\sqrt{0.1}}\frac{\sqrt{0.1}}{\sqrt{0.1}} - 120 = \frac{240}{0.1}\sqrt{0.1} - 120 = 120 \cdot 20\sqrt{0.1} - 120 = 120[20\sqrt{0.1} - 1]$$

Así tenemos que:

$\boxed{v_1(2) = \sqrt{120[20\sqrt{0.1} - 1]}}$ $\boxed{v_2(2) = -\sqrt{120[20\sqrt{0.1} - 1]}}$

Problema 25.
Considere una proyectil que entra en un medio viscoso con una velocidad v_0. La partícula recorre $4m$ antes de quedar en reposo. La velocidad en este medio viscoso esta dada por $v = v_0 - kx$. Considere que $v_0 = 900\left[\frac{m}{s}\right]$.



Determine la aceleración inicial del proyectil.

Solución:

Notemos que la velocidad es $v(x) = 900 - kx$. Tenemos que determinar $'k'$ y utilizaremos que $v(x = 4) = 0$. Por lo tanto:

$0 = v(x = 4) = 900 - 4k$

Por lo tanto $k = 225$.

De este modo tenemos que: $v(x) = 900 - 225x = 225[4 - x]$

Ahora recordando la definición de aceleración y velocidad además con regla de la cadena tenemos que:

$$a = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right)v$$

Ahora notemos que:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\Big(225[4-x]\Big) = -225$$

Así tenemos que:

$$a(v) = -225v$$

Por lo tanto, la aceleración inicial esta dada por:

$$a_0 = -225v_0 = -225 \cdot 900 = 202500$$

Finalmente, la aceleración inicial del proyectil es 202.500 $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

Problema 26.
Considere el mismo problema estudiado anteriormente.

Determine el tiempo trascurrido para que el proyectil alcance una distancia de $3.9m$ en el medio viscoso.

Solución:

Para esto, primero debemos determinar la posición del proyectil en función del tiempo. Recordando la definición de velocidad tenemos que:

$$225[4-x] = v(x) = \frac{dx}{dt}$$

Así tenemos que:

$$225\ dt = \frac{dx}{4-x}$$

Además de esto, tenemos que la posición en el tiempo $t = 0$ (cuando entra la partícula al medio viscoso) es $x = 0$. Así $x(0) = 0$.

Ahora:

$$\int_0^t 225\ du = \int_0^x \frac{db}{4-b}$$

$$225t = -ln(4-b)\Big]_0^x = -ln(4-x) + ln(4)$$

De este modo:

$$-225t + ln(4) = ln(4-x)$$

$$e^{-225t}e^{ln(4)} = 4 - x$$

$$e^{-225t} \cdot 4 = 4 - x$$

$$x(t) = 4 - 4 \cdot e^{-225t} = 4 \cdot [1 - e^{-225t}]$$

De este modo, la posición en función del tiempo esta dada por:

$$x(t) = 4 \cdot [1 - e^{-225t}]$$

Ahora hay que determinar el tiempo t' en que la partícula recorrió 3.9 m, es decir que $x(t') = 3.9$ m. Así tenemos que:

$$x(t') = 4 \cdot [1 - e^{-225t'}] = 3.9$$

$$1 - e^{-225t'} = \frac{3.9}{4}$$

$$1 - \frac{3.9}{4} = e^{-225t'}$$

$$\frac{0.1}{4} = e^{-225t'}$$

$$\frac{1}{40} = e^{-225t'}$$

Ahora aplicando logaritmo a ambos lados tenemos que:

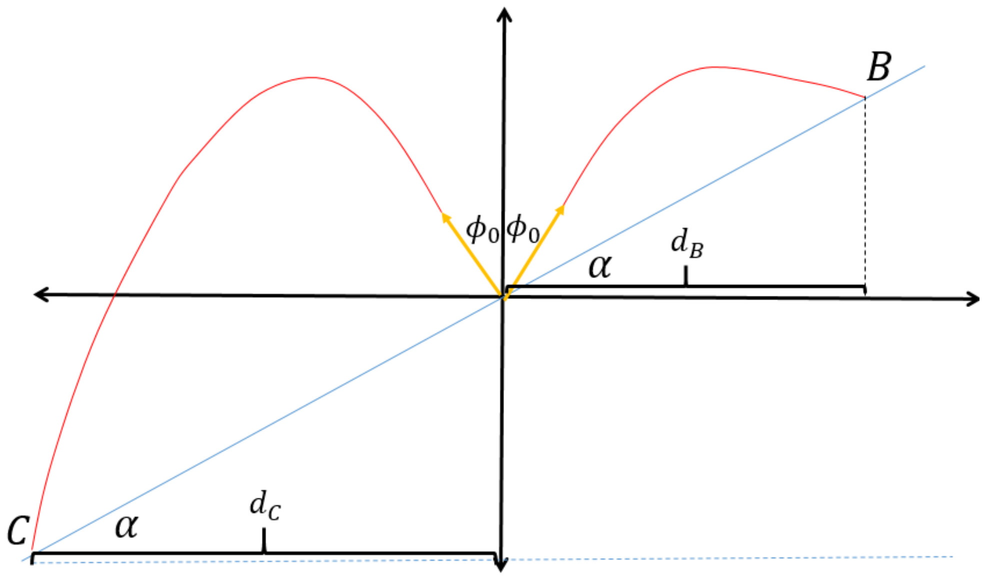
$$ln\left(\frac{1}{40}\right) = -225t'$$

$$-ln\,(40) = -225t'$$

$$\boxed{t' = \frac{ln(40)}{225}}$$

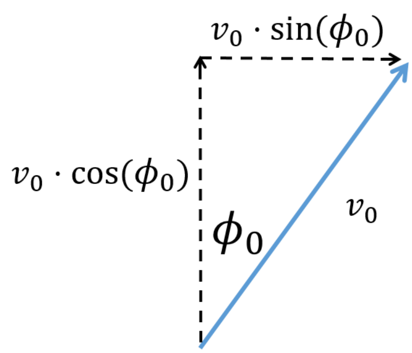
De este modo, la partícula se demora $\frac{ln(40)}{225}$ segundos en recorrer 3.9 metros.

Problema 27.
Considere una regadera la cual gira formando un angulo ϕ_0 con respecto al eje vertical, la cual esta instalada en un plano horizontal con un angulo α. La regadera lanza agua con una velocidad v_0. Sea B el punto en donde cae el agua cuando la regadora esta apuntando hacia la derecha y C el punto donde cae el agua cuando la regadora esta apuntando hacia la izquierda como se muestra en la imagen.



Determinar el valor de d_B

Solución:
Debemos hacer el análisis para el sector derecho. Primero descomponemos la velocidad:



Consideraremos como origen al lugar donde esta ubicada la regadera, de este modo, la ecuaciones de movimiento para el chorro que sale hacia la derecha son:

$$x(t) = v_0 \cdot sin(\phi_0) \cdot t$$
$$y(t) = v_0 \cdot cos(\phi_0) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Sea t' el momento en que impacta el chorro en B, tenemos que: $x(t') = d_B$ y $y(t') = d_B \cdot tan(\alpha)$. Ahora despejamos t', usando que $x(t') = d_B$, así tenemos que:

$$d_B = x(t') = v_0 \cdot sin(\phi_0) \cdot t'$$

De esta manera:

$t' = \dfrac{d_B}{v_0 \cdot sin(\phi_0)}$

Ahora como también tenemos que $y(t') = d_B \cdot tan(\alpha)$, entonces:

$$d_B \cdot tan(\alpha) = v_0 \cdot cos(\phi_0) \cdot \frac{d_B}{v_0 \cdot sin(\phi_0)} - \frac{g}{2} \cdot \frac{{d_B}^2}{{v_0}^2 \cdot sin^2(\phi_0)}$$

$$d_B \cdot tan(\alpha) = d_B \cdot cot(\phi_0) - \frac{g}{2} \cdot \frac{{d_B}^2}{{v_0}^2 \cdot sin^2(\phi_0)}$$

Como $d_B \neq 0$, entonces:

$$tan(\alpha) = cot(\phi_0) - \frac{g}{2} \cdot \frac{d_B}{{v_0}^2 \cdot sin^2(\phi_0)}$$

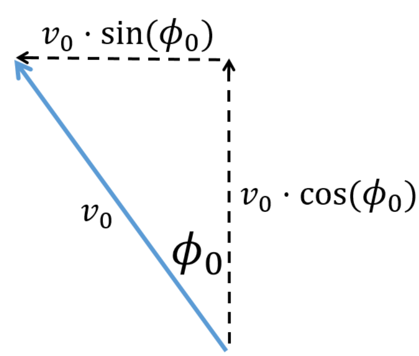
De este modo:

$$\boxed{d_B = \frac{2{v_0}^2 sin^2(\phi_0)[cot(\phi_0) - tan(\alpha)]}{g}}$$

Problema 28.
Considere el mismo problema analizado anteriormente. Determinar d_C

Solución:

Ahora analicemos el sector izquierdo. Primero descompondremos la velocidad:



Consideraremos como origen al lugar donde esta ubicada la regadera y como la única aceleración que esta actuando es la gravedad, entonces las ecuaciones de movimiento para el chorro de agua que llega al punto C son:

$$x(t) = -v_0 \cdot sin(\phi_0) \cdot t$$

$$y(t) = v_0 \cdot cos(\phi_0) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Ahora sea t' el momento en que el chorro llega a C, notemos que $x(t') = -d_C$ y $y(t') = -d_C \cdot tan(\alpha)$. Ahora despejaremos t' usando que $x(t') = -d_C$. De este modo:

$$-d_C = x(t') = -v_0 \cdot sin(\phi_0) \cdot t'$$

Así tenemos que:

$$t' = \frac{d_C}{v_0 \cdot sin(\phi_0)}$$

Además tenemos que $y(t') = -d_C \cdot tan(\alpha)$

De este modo:

$$-d_C \cdot tan(\alpha) = v_0 \cdot cos(\phi_0) \cdot \frac{d_C}{v_0 \cdot sin(\phi_0)} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{d_C}{v_0 \cdot sin(\phi_0)}\right)^2$$

$$-d_C \cdot tan(\alpha) = d_C \cdot cot(\phi_0) - \frac{g}{2} \cdot \frac{d_C^2}{v_0^2 sin^2(\phi_0)}$$

Como $d_C \neq 0$, entonces tenemos que:

$$-tan(\alpha) = cot(\phi_0) - \frac{g}{2} \cdot \frac{d_C}{v_0^2 sin^2(\phi_0)}$$

Así finalmente tenemos que:

$$\boxed{d_C = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot sin^2(\phi_0)[cot(\phi_0) + tan(\alpha)]}{g}}$$

Problema 29.
Considere el mismo problema estudiado anteriormente. Calcule la distancia y angulo optimo de salto considerando $\phi = \frac{\pi}{4}$.

Solución:
El angulo optimo estará dado por:

$\theta = -\frac{\frac{\pi}{4}}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$

Por lo tanto, el angulo óptimo de salto es:

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{8}}$$

Y la distancia optima sería:

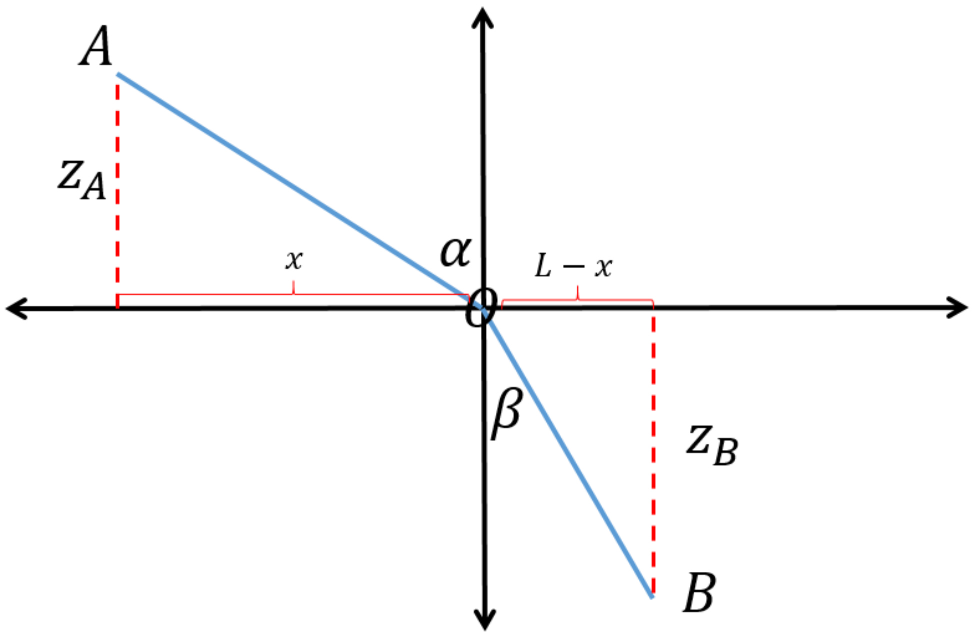
$$d = \frac{v^2}{g \cdot cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} \cdot [1 + sin\left(\frac{\pi}{4}\right)] = \frac{v^2}{g \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \cdot [1 + \frac{\sqrt{2}}{2}] = \frac{v^2}{g \cdot \left(\frac{1}{2}\right)} \cdot [1 + \frac{\sqrt{2}}{2}] = \frac{v^2}{g} \cdot [2 + \sqrt{2}]$$

Finalmente la distancia optima sería:

$$\boxed{d = \frac{v^2}{g} \cdot [2 + \sqrt{2}]}$$

Problema 30.
Considere una persona que se encuentra en el agua en el punto A y necesita llegar al punto B. Considere que en el agua puede viajar con una velocidad v_1, y en la arena viaja con una velocidad v_2. Demuestre que si la persona elige el camino más rápido, entonces se cumple que:

$$\frac{sin(\alpha)}{sin(\beta)} = \frac{v_1}{v_2}$$



Solución:

Notemos que la distancias z_A y z_B son fijas. Sea x la distancia horizontal desde A hasta O y sea y la distancia horizontal desde O hasta B, entonces tenemos que si la distancia horizontal desde A hasta B es L, entonces: $x + y = L \ \Rightarrow \ y = L - x$. Ahora, la distancia desde A hasta O es $\sqrt{z_A^2 + x^2}$ y la distancia desde O hasta B es $\sqrt{(L-x)^2 + z_B^2}$. Ahora como v_1 y v_2 son constantes, entonces el tiempo que se demora en llegar a O desde A es:

$t_1 = \frac{\sqrt{x^2+z_A^2}}{v_1}$

Y el tiempo en que se demora en llegar a B desde O es:

$t_2 = \frac{\sqrt{(L-x)^2+z_B^2}}{v_2}$

Finalmente, el tiempo total desde A hasta B es:

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + z_A^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2 + z_B^2}}{v_2}$$

donde $0 \leq x \leq L$

Ahora queremos minimizar $t(x)$, por lo tanto, procederemos a calcular $\dfrac{dt}{dx}$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z_A^2} \cdot v_1} - \frac{(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2 + z_B^2} \cdot v_2}$$

Ahora, necesitamos hacer que $\dfrac{dt}{dx} = 0$, de este modo:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + z_A^2} \cdot v_1} = \frac{(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2 + z_B^2} \cdot v_2}$$

Notemos que $sin(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2+z_A^2}}$ y que $sin(\beta) = \frac{(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2+z_B^2}}$.

Por lo tanto:

$$\frac{sin(\alpha)}{v_1} = \frac{sin(\beta)}{v_2}$$

Así tenemos finalmente que:

$$\boxed{\frac{sin(\alpha)}{sin(\beta)} = \frac{v_1}{v_2}}$$

Problema 31.
Considere una partícula la cual su posición en función del tiempo esta dada por:

$$r(t) = \hat{i} \cdot L \cdot cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) + \hat{j} \cdot v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

Determine el instante en que $v_y = 0$

Solución:
Notemos que:

$$y(t) = v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

De este modo:

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) = v_0 \cdot cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

Ahora sea t' el momento en que la velocidad v_y se anula entonces tenemos que: $v_y(t') = 0$

$$0 = v_y(t') = v_0 \cdot cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t'\right)$$

Por lo tanto:

$$cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t'\right) = 0$$

De este modo:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t' = \frac{\pi}{2}$$

Así finalmente:

$$\boxed{t' = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{\pi}{2}}$$

De este modo en $t' = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{\pi}{2}$ la velocidad v_y se anula.

Problema 32.
Considere el mismo problema estudiado anteriormente. ¿Qué curva describe la partícula?

Solución:
Notemos que:

$$x(t) = L \cdot cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

$$y(t) = v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

De este modo:

$$\frac{x(t)}{L} = cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

$$\frac{y(t)}{v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}} = sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

Ahora:

$$1 = sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) + cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) = \frac{x(t)^2}{(L)^2} + \frac{y(t)^2}{(v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}})^2}$$

De este modo:

$$1 = \frac{x(t)^2}{L^2} + \frac{y(t)^2}{\left(v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2}$$

Así tenemos que la partícula describe una elipse, en donde los semiejes mayor y menor están dados por:

$$a = L \qquad b = v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

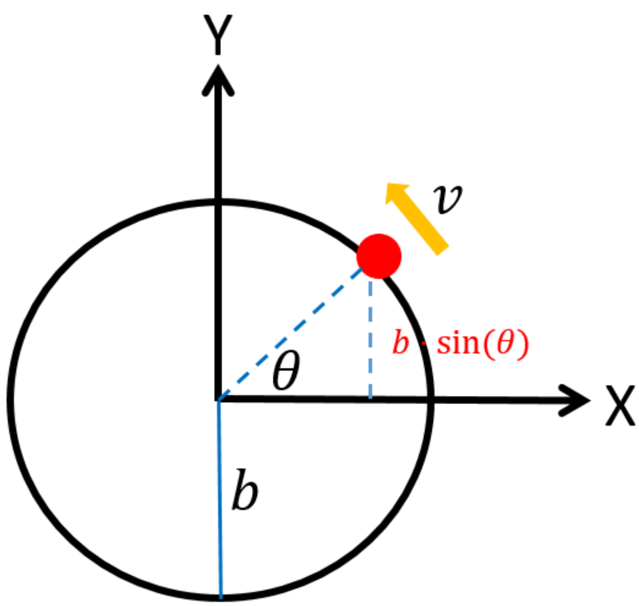
respectivamente

Problema 33.
Considere una rueda de radio b de un auto que va viajando en linea recta en un camino de barro. Las partículas de barro saltan desde la rueda con una velocidad de magnitud v. Demuestre que la altura máxima que puede alcanzar una partícula es:

$$b + \frac{v^2}{2g} + \frac{g \cdot b^2}{2 \cdot v^2}$$

Considerando que: $g \cdot b < v^2$

Solución:
Primero partiremos ilustrando la situación:



Notemos que sea θ el angulo en el que sale disparada la partícula de barro, y si consideramos que el origen del sistema esta ubicado en la linea recta que recorre el auto, entonces tenemos que la altura inicial de la partícula de barro esta dada por: $b + b \cdot sin(\theta)$.

Por otro lado, tenemos que:

$\vec{v} = v \cdot \hat{\theta} = v \cdot (-sin(\theta), cos(\theta)) = [-v \cdot sin(\theta), v \cdot cos(\theta)]$

Así tenemos que la velocidad inicial en el eje Y esta dada por $v_{y0} = v \cdot cos(\theta)$

Si también consideramos que esta actuando la gravedad, entonces la ecuación para una partícula que salta con un angulo θ es:

$$y(t) = b + b \cdot sin(\theta) + v \cdot cos(\theta) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Como sabemos la altura máxima se da cuando la velocidad se anula. Ahora calcularemos la velocidad en función del tiempo:

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = v \cdot cos(\theta) - g \cdot t$$

Sea t' el instante en que la velocidad se anula, entonces $v(t') = 0$, utilizando esto determinaremos t'

$$0 = v_y(t') = v \cdot cos(\theta) - g \cdot t'$$

Así tenemos que:

$t' = \frac{v \cdot cos(\theta)}{g}$

La altura máxima esta dada por $y(t')$, así calcularemos la altura máxima

$$y(t') = b + b \cdot sin(\theta) + v \cdot cos(\theta) \cdot \left(\frac{v \cdot cos(\theta)}{g}\right) - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v \cdot cos(\theta)}{g}\right)^2 = b + b \cdot sin(\theta) + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2 \cdot cos^2(\theta)}{g}$$

Así la altura máxima en función del angulo es:

$$y_{max}(\theta) = b + b \cdot sin(\theta) + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2 \cdot cos^2(\theta)}{g}$$

Ahora queremos encontrar el angulo θ optimo. Para esto derivaremos $y_{max}(\theta)$ respecto a θ

$$\frac{dy_{max}(\theta)}{d\theta} = b \cdot cos(\theta) - \frac{v^2}{g} cos(\theta) \cdot sin(\theta)$$

Ahora el θ optimo cumple que: $\dfrac{dy_{max}(\theta)}{d\theta} = 0$, de este modo:

$$b \cdot cos(\theta) = \frac{v^2}{g} cos(\theta) \cdot sin(\theta)$$

No consideraremos a el caso en que $cos(\theta) = 0$, por lo tanto $cos(\theta) \neq 0$, de este modo:

$$\frac{b \cdot g}{v^2} = sin(\theta)$$

Y aquí se puede corroborar que es importante que $b \cdot g < v^2 \;\Rightarrow\; \frac{b \cdot g}{v^2} < 1$, de lo contrario, no tendría sentido que $sin(\theta) = \frac{b \cdot g}{v^2}$

Como $sin(\theta) = \dfrac{b \cdot g}{v^2}$, entonces usando que $sin^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$, tenemos que:

$$cos^2(\theta) = 1 - sin^2(\theta) = 1 - \frac{b^2 \cdot g^2}{v^4}$$

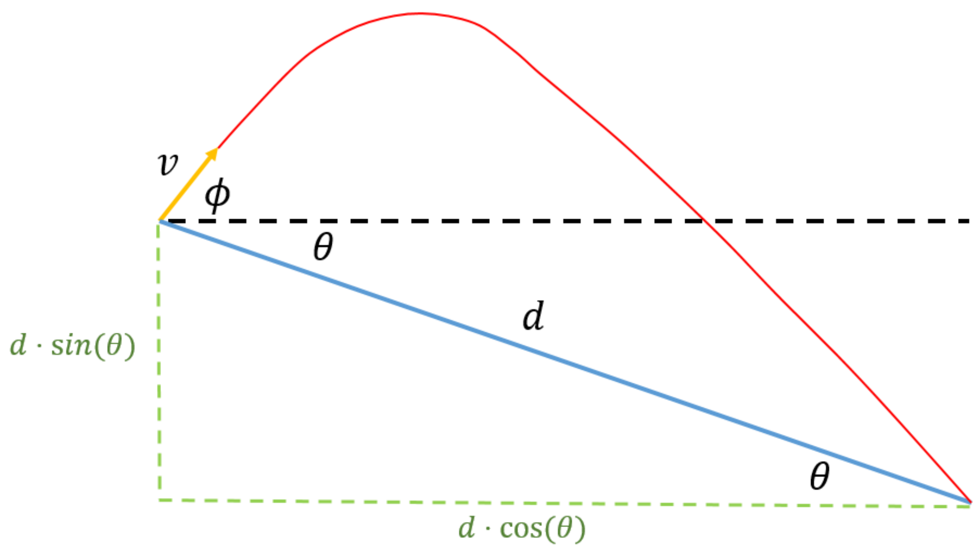
Reemplazando en la altura máxima tenemos que:

$$y_{max} = b + b \cdot \left(\frac{b \cdot g}{v^2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{g} \cdot \left(1 - \frac{b^2 \cdot g^2}{v^4}\right) = b + \frac{b^2 \cdot g}{v^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 \cdot g}{v^2} = b + \frac{b^2 \cdot g}{2 \cdot v^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{g}$$

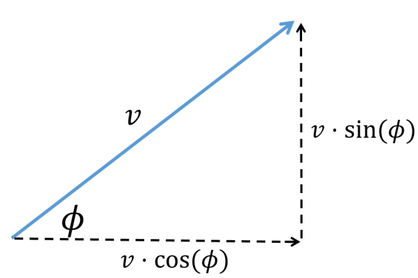
Así, finalmente tenemos que la altura máxima que puede alcanzar una partícula de barro es:

$$\boxed{y_{max} = b + \frac{b^2 \cdot g}{2 \cdot v^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{g}}$$

Problema 34.
Considere un esquiador que va a saltar con una velocidad de $v = 10 \left[\frac{m}{s}\right]$ en un angulo $\phi = 15^o$ en una pista que forma un angulo $\theta = 50^o$ respecto a la horizontal. Determine la distancia a la que el esquiador cae en la pista.



Solución:
Primero determinaremos las ecuaciones de movimiento para el esquiador. Consideremos como el origen al punto en donde salta el esquiador. Primero descompondremos la velocidad:



Como la gravedad es la única aceleración actuando, entonces:

$$x(t) = v \cdot cos(\phi) \cdot t$$

$$y(t) = v \cdot sin(\phi) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Sea t' el instante en que el esquiador cae en la pista, tenemos que: $x(t') = d \cdot cos(\theta)$ y $y(t') = -d \cdot sin(\theta)$. Despejaremos t' usando que $x(t') = d \cdot cos(\theta)$.

De este modo:

$$d \cdot cos(\theta) = v \cdot cos(\phi) \cdot t'$$

Así, tenemos que:

$$t' = \frac{d \cdot cos(\theta)}{v \cdot cos(\phi)}$$

Como $y(t') = -d \cdot sin(\theta)$, entonces:

$$-d \cdot sin(\theta) = v \cdot sin(\phi) \cdot \left(\frac{d \cdot cos(\theta)}{v \cdot cos(\phi)}\right) - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{d \cdot cos(\theta)}{v \cdot cos(\phi)}\right)^2 = d \cdot tan(\phi) \cdot cos(\theta) - \frac{g}{2} \cdot \frac{d^2 \cdot cos^2(\theta)}{v^2 \cdot cos^2(\phi)}$$

$$-d \cdot sin(\theta) = d \cdot tan(\phi) \cdot cos(\theta) - \frac{g}{2} \cdot \frac{d^2 \cdot cos^2(\theta)}{v^2 \cdot cos^2(\phi)}$$

Como $d \neq 0$, entonces:

$$-sin(\theta) = tan(\phi) \cdot cos(\theta) - \frac{g}{2} \cdot \frac{d \cdot cos^2(\theta)}{v^2 \cdot cos^2(\phi)}$$

Así finalmente tenemos que:

$$d = \frac{2v^2 cos^2(\phi)[sin(\theta) + tan(\phi) \cdot cos(\theta)]}{g \cdot cos^2(\theta)}$$

Reemplazando con los datos tenemos que:

$$\boxed{d = 43.2 \text{ metros}}$$

Problema 35.
Considere el problema analizado anteriormente. ¿Cuanto tiempo se demora el esquiador en caer a la pista?

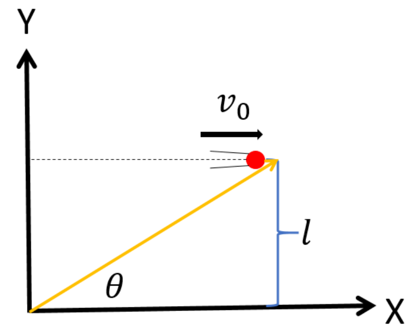
Solución:
Recordemos que anteriormente calculamos que:

$$t' = \frac{d \cdot cos(\theta)}{v \cdot cos(\phi)}$$

Reemplazando con los valores correspondientes tenemos que:

$$\boxed{t' = 2.87 \text{ segundos}}$$

Problema 36.
Considere una partícula que se mueve a velocidad constante v_0 en dirección $\hat{i}$ en el plano XY (tal como se muestra en la figura). Determine su velocidad en coordenadas polares. Además de eso de una expresión para la velocidad angular.



Solución:

De acuerdo a la figura notemos que podemos decir que:

$$sin(\theta) = \frac{l}{\rho}$$

Así tenemos que:

$$\rho = \frac{l}{sin(\theta)} = l \cdot csc(\theta)$$

Finalmente:

$$\boxed{\rho = l \cdot csc(\theta)}$$

Ahora notemos que:

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d}{d\theta}[l \cdot csc(\theta)]\dot{\theta} = -l \cdot csc(\theta) \cdot cot(\theta) \cdot \dot{\theta}$$

De este modo:

$$\boxed{\dot{\rho} = -l \cdot csc(\theta) \cdot cot(\theta) \cdot \dot{\theta}}$$

Así tenemos que:

$$v_\rho = \dot{\rho} = -l \cdot csc(\theta) \cdot cot(\theta) \cdot \dot{\theta}$$

Y además:

$$v_\theta = \rho \cdot \dot{\theta} = l \cdot csc(\theta) \cdot \dot{\theta}$$

Y finalmente:

$$\vec{v(t)} = v_\rho \cdot \hat{\rho} + v_\theta \cdot \hat{\theta} = -l \cdot csc(\theta) \cdot cot(\theta) \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{\rho} + l \cdot csc(\theta) \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{\theta} = l \cdot csc(\theta) \cdot \dot{\theta} \cdot [-cot(\theta)\hat{\rho} + \hat{\theta}]$$

Finalmente en coordenadas polares la velocidad es:

$$\boxed{\vec{v(t)} = l \cdot csc(\theta) \cdot \dot{\theta} \cdot [-cot(\theta)\hat{\rho} + \hat{\theta}]}$$

Ahora notemos que:

$$-cot(\theta)\hat{\rho} + \hat{\theta} = -\frac{cos(\theta)}{sin(\theta)}(cos(\theta), sin(\theta)) + (-sin(\theta), cos(\theta)) = \left(-\frac{cos^2(\theta)}{sin(\theta)}, -cos(\theta)\right) + (-sin(\theta), cos(\theta))$$

$$= \left(-\frac{cos^2(\theta)}{sin(\theta)} - sin(\theta), 0\right) = \left(-\frac{[cos^2(\theta) + sin^2(\theta)]}{sin(\theta)}, 0\right) = -\left(\frac{1}{sin(\theta)}, 0\right)$$

Así tenemos que:

$$\vec{v(t)} = -l \cdot csc(\theta) \cdot \dot{\theta}\left(\frac{1}{sin(\theta)}, 0\right) = -l \cdot \frac{1}{sin(\theta)} \cdot \dot{\theta}\left(\frac{1}{sin(\theta)}, 0\right) = -l \cdot \dot{\theta} \cdot \frac{1}{sin^2\theta} \cdot (1, 0) = -l \cdot \dot{\theta} \cdot \frac{1}{sin^2\theta} \cdot \hat{i}$$

Ahora:

$$\|\vec{v(t)}\| = \frac{l \cdot |\dot{\theta}|}{sin^2(\theta)}$$

Como la velocidad es constante, e igual a v_0:

$$\frac{l \cdot |\dot{\theta}|}{sin^2(\theta)} = v_0$$

Ahora del gráfico, se puede observar claramente que $\dot{\theta} < 0$, por ende: $|\dot{\theta}| = -\dot{\theta}$

Así finalmente tenemos que:

$$\boxed{\dot{\theta} = -\frac{v_0}{l} \cdot sin^2(\theta)}$$

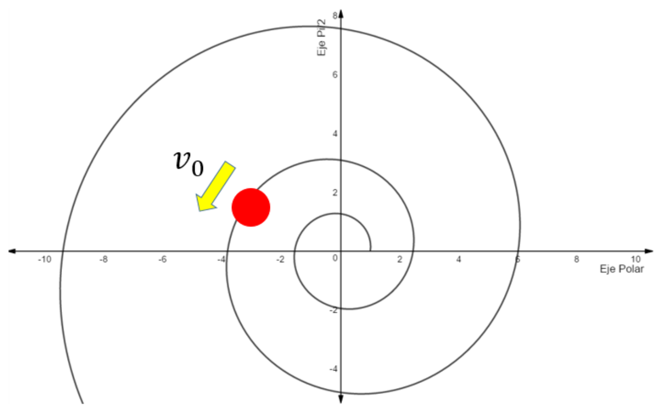
Problema 37.

Considere una partícula que se mueve en una espiral logarítmica, es decir que: $\rho = Be^{a\theta}$ $(B > 0)$, de modo que su rapidez sea constante durante el tiempo e igual a v_0. Determine:

a) $v(\vec{t})$ en coordenadas polares

b) $a(\vec{t})$ en coordenadas polares

c) Calcule $v(\vec{t}) \cdot a(\vec{t})$



Solución:

a) Notemos que:

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right) \cdot \dot{\theta} = \left(\frac{d(Be^{a\theta})}{d\theta}\right) \cdot \dot{\theta} = B \cdot a \cdot e^{a\theta} \cdot \dot{\theta}$$

De este modo:

$$v(\vec{t}) = \dot{\rho} \cdot \hat{\rho} + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{\theta} = B \cdot a \cdot e^{a\theta} \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{\rho} + B \cdot e^{a\theta} \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{\theta} = Be^{a\theta}\dot{\theta}[a \cdot \hat{\rho} + \hat{\theta}]$$

Así tenemos que:

$$\|v(t)\| = |B|e^{a\theta}|\dot{\theta}|\sqrt{a^2+1} = v_0$$

Ahora, como $B > 0$, entonces: $|B| = B$ y también como el angulo esta aumentando, entonces $\dot{\theta} > 0$, por lo tanto: $|\dot{\theta}| = \dot{\theta}$

De este modo:

$$Be^{a\theta}\dot{\theta} = \frac{v_0}{\sqrt{a^2+1}}$$

Finalmente:

$$\boxed{v(\vec{t}) = \frac{v_0}{\sqrt{a^2+1}}[a \cdot \hat{\rho} + \hat{\theta}]}$$

b) Ahora notemos que como:

$$\boxed{\dot{\theta} = \frac{v_0}{B\sqrt{a^2+1}}e^{-a\theta}}$$

Entonces:

$$\dot{\rho} = aBe^{a\theta}\dot{\theta} = aBe^{a\theta}\frac{v_0}{B\sqrt{a^2+1}}e^{-a\theta} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}v_0$$

Así tenemos que: $\boxed{\rho = Be^{a\theta}}$, $\boxed{\dot{\rho} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}v_0}$

Ahora: $\ddot{\rho} = \frac{d(\dot{\rho})}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}v_0\right) = 0$. Así: $\boxed{\ddot{\rho} = 0}$

Ahora como tenemos que:

$$\dot{\theta}e^{a\theta} = \frac{v_0}{B\sqrt{a^2+1}}$$

Podemos derivar esta ecuación:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}e^{a\theta}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_0}{B\sqrt{a^2+1}}\right)$$

Lo que implica que:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}e^{a\theta}\right) = 0$$

Ahora:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}e^{a\theta}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\right)e^{a\theta} + \dot{\theta}\frac{d}{dt}\left(e^{a\theta}\right) = \ddot{\theta}e^{a\theta} + \dot{\theta}\left[\frac{d}{d\theta}\left(e^{a\theta}\right)\right] \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \ddot{\theta}e^{a\theta} + \dot{\theta}e^{a\theta}a \cdot \dot{\theta} = e^{a\theta}[\ddot{\theta} + a(\dot{\theta})^2] = 0$$

Así tenemos que:

$$\ddot{\theta} + a(\dot{\theta})^2 = 0$$

Así, finalmente tenemos que:

$$\boxed{\ddot{\theta} = -a(\dot{\theta})^2}$$

Ahora recordemos que:

$$\boxed{a(\vec{t}) = [\ddot{\rho} - \rho \cdot (\dot{\theta})^2] \cdot \hat{\rho} + [2\dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta}] \cdot \hat{\theta}}$$

De este modo:

$$a(\vec{t}) = [\ddot{\rho} - \rho \cdot (\dot{\theta})^2] \cdot \hat{\rho} + [2\dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta}] \cdot \hat{\theta} = -Be^{a\theta} \cdot \left(\frac{v_0}{B\sqrt{a^2+1}} e^{-a\theta} \right)^2 \hat{\rho} + \left[2\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} v_0 \cdot \frac{v_0}{B\sqrt{a^2+1}} e^{-a\theta} + Be^{a\theta}(-a\dot{\theta}^2) \right] \hat{\theta}$$

$$= -Be^{a\theta} \cdot \frac{v_0^2}{B^2[a^2+1]} e^{-2a\theta} \hat{\rho} + \left[2\frac{a \cdot v_0^2}{B[a^2+1]} e^{-a\theta} - aBe^{a\theta} \left(\frac{v_0}{B\sqrt{a^2+1}} e^{-a\theta} \right)^2 \right] \hat{\theta}$$

$$= -\frac{v_0^2}{B[a^2+1]} e^{-a\theta} \hat{\rho} + \left[2\frac{a \cdot v_0^2}{B[a^2+1]} e^{-a\theta} - aBe^{a\theta} \frac{v_0}{B^2[a^2+1]} e^{-2a\theta} \right] \hat{\theta}$$

$$= -\frac{v_0^2}{B[a^2+1]} e^{-a\theta} \hat{\rho} + \left[\frac{2a \cdot v_0^2}{B[a^2+1]} e^{-a\theta} - \frac{a \cdot v_0^2}{B[a^2+1]} e^{-a\theta} \right] \hat{\theta}$$

$$= -\frac{v_0^2}{B[a^2+1]} e^{-a\theta} \hat{\rho} + \frac{a \cdot v_0^2}{B[a^2+1]} e^{-a\theta} \hat{\theta}$$

$$= \left(\frac{v_0^2}{B[a^2+1]} e^{-a\theta} \right) [-\hat{\rho} + a\hat{\theta}]$$

Así finalmente:

$$\boxed{a(\vec{t}) = \left(\frac{v_0^2}{B[a^2+1]} e^{-a\theta} \right) [-\hat{\rho} + a\hat{\theta}]}$$

c) Ahora tenemos que calcular: $v(\vec{t}) \cdot a(\vec{t})$. Recordemos que:

$$a(\vec{t}) = \left(\frac{v_0^2}{B[a^2+1]} e^{-a\theta} \right) [-\hat{\rho} + a\hat{\theta}]$$

$$v(\vec{t}) = \frac{v_0}{\sqrt{a^2+1}} [a \cdot \hat{\rho} + \hat{\theta}]$$

Así, tenemos que:

$$\vec{a(t)} \cdot \vec{v(t)} = \left(\frac{v_0^2}{B[a^2+1]}e^{-a\theta}\right)[-\hat{\rho}+a\hat{\theta}] \cdot \frac{v_0}{\sqrt{a^2+1}}[a \cdot \hat{\rho}+\hat{\theta}] = \left(\frac{v_0^3}{B[\sqrt{a^2+1}]^3}e^{-a\theta}\right)[-\hat{\rho}+a\hat{\theta}] \cdot [a \cdot \hat{\rho}+\hat{\theta}]$$

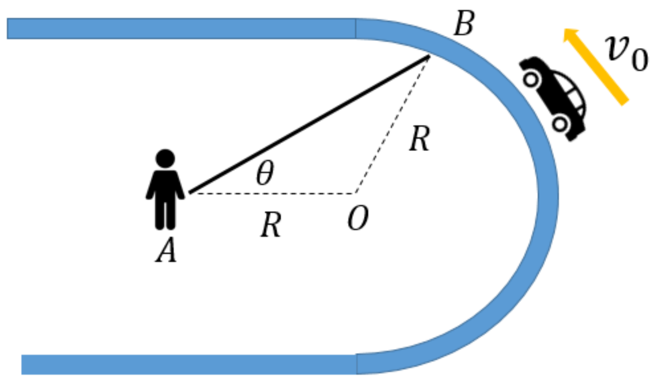
$$= \left(\frac{v_0^3}{B[\sqrt{a^2+1}]^3}e^{-a\theta}\right)[-a+a] = 0$$

Así finalmente:

$$\boxed{\vec{a(t)} \cdot \vec{v(t)} = 0}$$

Problema 38.

Una persona que esta en A, esta observando un auto de carrera en B (Como se observa en la figura), el cual en toda la curva lleva una rapidez constante de v_0. Determine la velocidad angular con la cual la persona gira la cabeza si es que sigue al auto con la mirada en toda la curva.



Solución:

Primero notemos que se forma el triangulo AOB el cual es isósceles. Trazamos una linea desde O hasta el punto medio de AB, llámese punto E. De este modo, los triángulos OAE y OEB son iguales. Ahora, es claro que: $AE = Rcos(\theta)$, así tenemos que: $AB = 2Rcos(\theta)$. De este modo:

$$\boxed{\rho = 2Rcos(\theta)}$$

Ahora:

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d[2Rcos(\theta)]}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = -2Rsin(\theta)\dot{\theta}$$

Así tenemos que:

$$\boxed{\dot{\rho} = -2Rsin(\theta)\dot{\theta}}$$

Recordando que:

$$v(\vec{t}) = \dot{\rho} \cdot \hat{\rho} + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{\theta}$$

Entonces tenemos que:

$$v(\vec{t}) = -2Rsin(\theta)\dot{\theta}\hat{\rho} + 2Rcos(\theta)\dot{\theta}\hat{\theta} = 2R\dot{\theta}[-sin(\theta)\hat{\rho} + cos(\theta)\hat{\theta}]$$

Ahora:

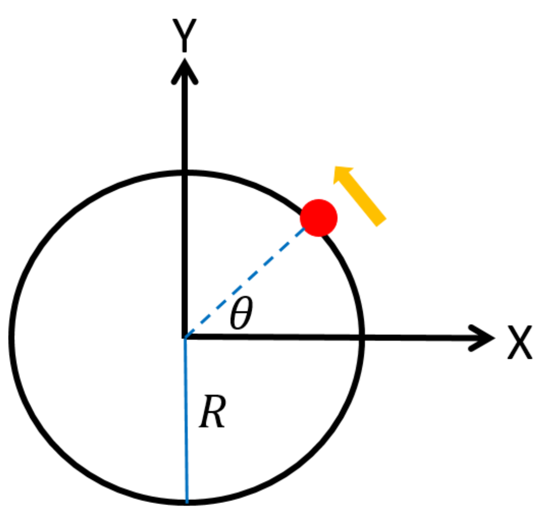
$$\|v(\vec{t})\| = 2R|\dot{\theta}|\sqrt{[-sin(\theta)]^2 + [cos(\theta)]^2} = 2R|\dot{\theta}|\sqrt{cos^2(\theta) + sin^2(\theta)} = 2R|\dot{\theta}|$$

Ahora como $\dot{\theta} > 0$, entonces: $|\dot{\theta}| = \dot{\theta}$, y como $\|v(\vec{t})\| = v_0$, entonces:

$$\boxed{\dot{\theta} = \frac{v_0}{2R}}$$

Problema 39.

Considere una partícula que se mueve en una circunferencia de radio R. La longitud de arco recorrida en función del tiempo por la partícula esta dada por: $s(t) = R \cdot ln(1 + kt)$. Determine las componentes normales y tangenciales de la aceleración en función del tiempo.



Solución:

Como estamos en una circunferencia de radio R, sabemos que: $s(t) = R \cdot \theta(t)$, por lo tanto:

$$\theta(t) = \frac{s(t)}{R} = \frac{R \cdot ln(1+kt)}{R} = ln(1+kt)$$

Así tenemos que:

$$\boxed{\theta(t) = ln(1+kt)}$$

Así:

$$\boxed{\dot{\theta} = \frac{k}{1+kt}}$$

También tenemos que:

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{k^2}{(1+kt)^2}}$$

Además de eso:

$$\boxed{\rho = R}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\dot{\rho} = 0}$$

Y también:

$$\boxed{\ddot{\rho} = 0}$$

Ahora usando la formula de aceleración para coordenadas polares que es:

$$a(\vec{t}) = [\ddot{\rho} - \rho \cdot (\dot{\theta})^2] \cdot \hat{\rho} + [2\dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta}] \cdot \hat{\theta}$$

Entonces tenemos que:

$$a(\vec{t}) = -R \left[\frac{k}{1+kt}\right]^2 \hat{\rho} + R\left[-\frac{k^2}{(1+kt)^2}\right] \hat{\theta} = -R\frac{k^2}{(1+kt)^2} \cdot \hat{\rho} - R\frac{k^2}{(1+kt)^2} \cdot \hat{\theta}$$

Así:

$$\boxed{a(\vec{t}) = -\frac{Rk^2}{(1+kt)^2} \cdot \hat{\rho} - \frac{Rk^2}{(1+kt)^2} \cdot \hat{\theta}}$$

Ahora la componente tangencial es la que acompaña a $\hat{\theta}$. Por lo tanto, la componente tangencial de la aceleración es:

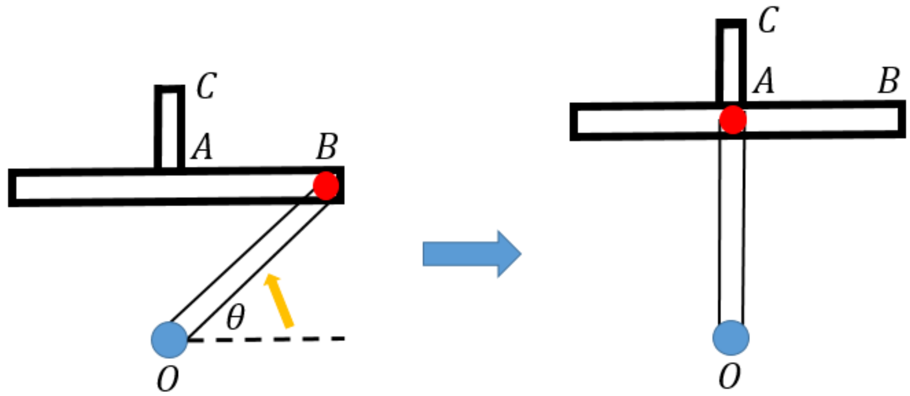
$$\boxed{a_{tangencial} = -\frac{Rk^2}{(1+kt)^2}}$$

Mientras que la componente normal es la que acompaña a $\hat{\rho}$. Por lo tanto, la componente normal de la aceleración es:

$$\boxed{a_{normal} = -\frac{Rk^2}{(1+kt)^2}}$$

Problema 40.

Considere un aparato que transforma un movimiento de rotación en un movimiento lineal (tal como se muestra en la figura). Note que el brazo OB se desliza por la ranura. Considere que el brazo OB gira con velocidad angular $\dot{\theta} = k$, con k constante. Así la barra AC solo se mueve verticalmente. Determine la velocidad y aceleración de la barra AC.



Solución:

Notemos que la velocidad y aceleración de la barra AC es la misma que la velocidad y aceleración del punto C.

Notemos que la posición del punto C es:

$$\boxed{\vec{r(t)} = [l \cdot sin(\theta) + h] \cdot \hat{j}}$$

De este modo:

$$\vec{v(t)} = \frac{d\vec{r(t)}}{dt} = \frac{d}{dt}\Big([l \cdot sin(\theta) + h] \cdot \hat{j}\Big) = \frac{d}{dt}([l \cdot sin(\theta) + h]) \cdot \hat{j}$$

Ahora:

$$\frac{d}{dt}([l\cdot sin(\theta)+h])=\frac{d(l\cdot sin(\theta))}{dt}=l\cdot\frac{d(sin(\theta))}{dt}=l\cdot\left[\frac{d(sin(\theta))}{d\theta}\right]\cdot\left[\frac{d\theta}{dt}\right]=l\cdot cos(\theta)\cdot\dot{\theta}=l\cdot cos(\theta)\cdot K=K\cdot l\cdot cos(\theta)$$

De este modo:

$$\boxed{v(\vec{t})=K\cdot l\cdot cos(\theta)\cdot\hat{j}}$$

Ahora:

$$a(\vec{t})=\frac{dv(\vec{t})}{dt}=\frac{d}{dt}\left(K\cdot l\cdot cos(\theta)\cdot\hat{j}\right)=K\cdot l\cdot\frac{d}{dt}(cos(\theta))\cdot\hat{j}$$

Notemos que:

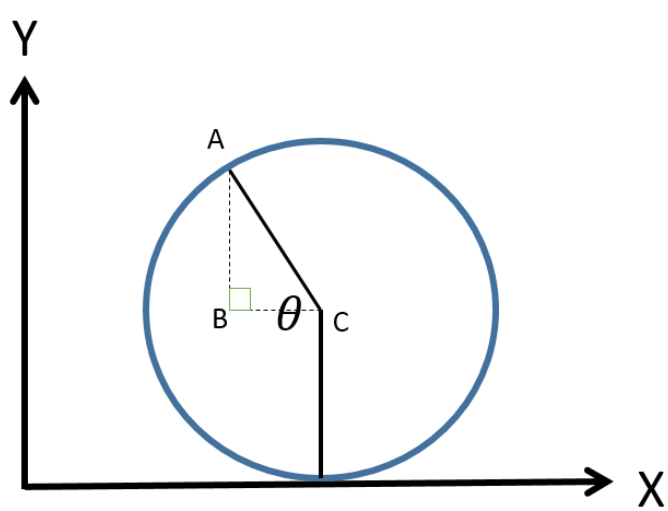
$$\frac{d(cos(\theta))}{dt}=\left(\frac{d[cos(\theta)]}{d\theta}\right)\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)=-sin(\theta)\cdot\dot{\theta}=-K\cdot sin(\theta)$$

Así finalmente tenemos que:

$$\boxed{a(\vec{t})=-K^2\cdot l\cdot sin(\theta)\cdot\hat{j}}$$

Problema 41.

Considere una partícula que esta sobre una circunferencia que rueda sin resbalar. La partícula esta en A (como muestra la figura). La curva que describa la trayectoria de la partícula se denomina cicloide. Determine:



a) Las ecuaciones paramétricas de la partícula.

b) La velocidad de la partícula. Considere que la circunferencia rueda con velocidad angular constante ω.

c) Calcule la aceleración.

Solución:

Sea C el punto que indica el centro de la circunferencia. Ahora notemos que:

$$x_c = R \cdot \theta$$

$$y_c = R$$

Ahora sea el triangulo ABC (como se observa en la figura), notemos que: $\sphericalangle BCA = \theta - \frac{\pi}{2}$. Notemos que:

$$BC = R \cdot cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$AB = R \cdot sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

Ahora notemos que:

$$cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = cos\left(\theta\right) \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(\theta\right) \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = sin(\theta)$$

Y además:

$$sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = sin\left(\theta\right) \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - cos\left(\theta\right) \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -cos(\theta)$$

De este modo:

$$BC = R \cdot sin(\theta)$$

$$AB = -R \cdot cos(\theta)$$

Ahora, la posición de la partícula en A esta dada por:

$$x(t) = x_c - BC = R \cdot \theta - R \cdot sin(\theta)$$

$$y(t) = y_c + AB = R - R \cdot cos(\theta)$$

Así finalmente tenemos que:

$$\boxed{x(t) = R \cdot [\theta - sin(\theta)]}$$

$$\boxed{y(t) = R \cdot [1 - cos(\theta)]}$$

b) Considerando que la circunferencia gira con velocidad angular constante, entonces:

$$\theta(t) - \theta_0 = \int_0^t \omega dx = \omega t$$

Ahora considerando que: $\theta_0 = 0$, entonces tenemos que:

$$\boxed{\theta(t) = \omega t}$$

Ahora:

$$\vec{v(t)} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j}\right) = \left(\frac{dx(t)}{dt}\right) \cdot \hat{i} + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right) \cdot \hat{j}$$

Notemos que:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{d\theta}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d}{d\theta}(R[\theta - sin(\theta)]) \cdot \dot{\theta} = R \cdot [1 - cos(\theta)] \cdot \omega$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left(\frac{dy(t)}{d\theta}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d}{d\theta}(R[1 - cos(\theta)]) \cdot \dot{\theta} = R \cdot sin(\theta) \cdot \omega$$

De este modo:

$$\boxed{\vec{v(t)} = R \cdot \omega \cdot ([1 - cos(\omega t)] \cdot \hat{i} + [sin(\omega t)] \cdot \hat{j})}$$

c) Ahora tenemos que calcular la aceleración:

$$\vec{a(t)} = \frac{d\vec{v(t)}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R \cdot \omega \cdot ([1 - cos(\omega t)] \cdot \hat{i} + [sin(\omega t)] \cdot \hat{j})\right) = R \cdot \omega \cdot \left[\left(\frac{d[1 - cos(\omega t)]}{dt}\right) \cdot \hat{i} + \left(\frac{d[sin(\omega t)]}{dt}\right) \cdot \hat{j}\right]$$

Ahora calculamos:

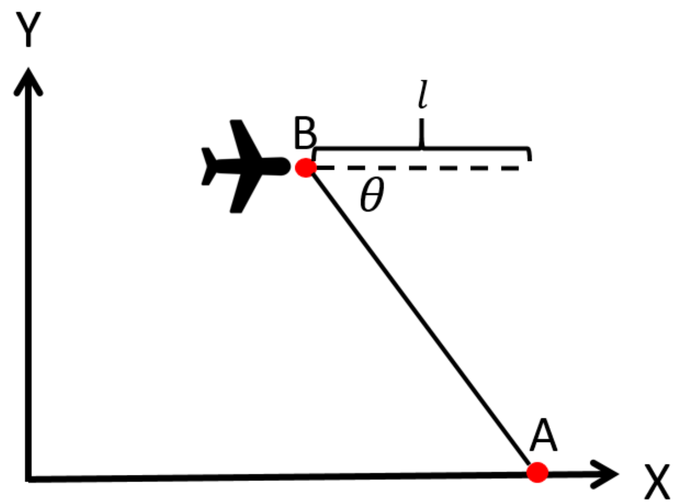
$$\frac{d[1 - cos(\omega t)]}{dt} = sin(\omega t) \cdot \omega$$

$$\frac{d[sin(\omega t)]}{dt} = cos(\omega t) \cdot \omega$$

Finalmente tenemos que:

$$\boxed{\vec{a(t)} = R \cdot \omega^2[sin(\omega t) \cdot \hat{i} + cos(\omega t) \cdot \hat{j}]}$$

Problema 42.
Un avión vuela con una velocidad v_0 constante como se muestra en la figura. El avión suelta un paquete en B y quiere que llegue a A. ¿Qué ángulo θ debe formar la visual con la horizontal cuando se lanza el paquete?



Solución:
Notemos que el paquete queda con la velocidad del avión una vez que es lanzada. De este modo, las ecuaciones para el paquete son:

$$x(t) = v_0 \cdot t$$

$$y(t) = H - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Ahora notemos que sea t^* el tiempo en que el paquete llega a A, entonces tenemos que:

$$x(t^*) = l \qquad y(t^*) = 0$$

También por trigonometria tenemos que: $l = H \cdot cot(\theta)$

De este modo:

$$x(t^*) = H \cdot cot(\theta) \qquad y(t^*) = 0$$

Ahora, notemos que estas ecuaciones nos definen el siguiente sistema:

$$v_0 \cdot t^* = H \cdot cot(\theta)$$

$$\frac{g}{2} \cdot (t^*)^2 = H$$

De la primera ecuación obtenemos que: $t^* = \dfrac{H \cdot cot(\theta)}{v_0}$ y lo reemplazamos en la segunda ecuación y nos queda:

$$\frac{g \cdot H^2 \cdot cot^2(\theta)}{2 \cdot v_0^2} = H$$

De este modo:

$$cot^2(\theta) = \frac{2 \cdot v_0^2}{g \cdot H}$$

Ahora como $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces $cot(\theta) \geq 0$, y además como $v_0 > 0$, entonces:

$$cot(\theta) = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2}{g \cdot H}}$$

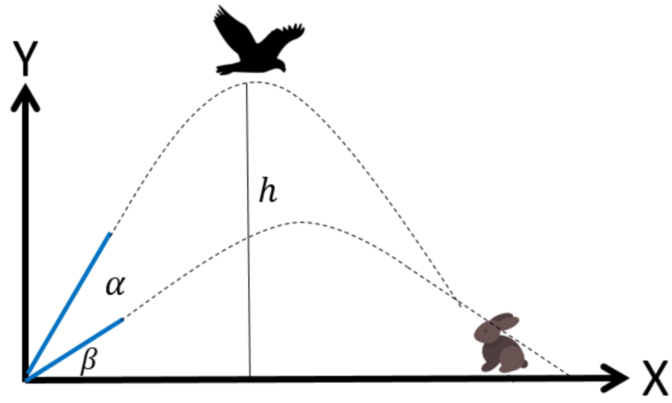
Ahora como $tan(\theta) = \dfrac{1}{cot(\theta)}$, entonces:

$$tan(\theta) = \frac{1}{v_0} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot H}{2}}$$

Y finalmente tenemos que:

$$\boxed{\theta = tan^{-1}\left(\frac{1}{v_0} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot H}{2}}\right)}$$

Problema 43.
Una piedra es lanzada desde el punto B con rapidez inicial v_0, con un angulo α. Una segunda piedra es lanzada cierto tiempo después desde el punto B y con la misma rapidez inicial v_0. ¿A que altura h debe estar un pájaro para que sea golpeado horizontalmente por la primera piedra?



Solución:

Primero calcularemos el tiempo en el que debe ser golpeado el pájaro para que sea golpeado horizontalmente. Para que sea golpeado horizontalmente debe ocurrir que $\frac{dy}{dx} = 0$. Ahora calcularemos las ecuaciones paramétricas para la primera piedra.

$$x(t) = v_0 \cdot cos(\alpha) \cdot t$$

$$y(t) = v_0 \cdot sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

De este modo:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cdot cos(\alpha)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \cdot sin(\alpha) - g \cdot t$$

Ahora como nos piden que: $\frac{dy}{dx} = 0$, entonces:

$$0 = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v_0 \cdot sin(\alpha) - g \cdot t}{v_0 \cdot cos(\alpha)}$$

De este modo:

$$\frac{v_0 \cdot sin(\alpha) - g \cdot t}{v_0 \cdot cos(\alpha)} = 0$$

Así tenemos que:

$$t^* = \frac{v_0 \cdot sin(\alpha)}{g}$$

Ahora en este tiempo encontrado la altura debe ser h, por ende $y(t^*) = h$. Ahora daremos una expresión para $y(t^*)$:

$$y(t^*) = v_0 \cdot sin(\alpha) \cdot t^* - \frac{g}{2} \cdot t^{*2} = v_0 \cdot sin(\alpha) \cdot \frac{v_0 \cdot sin(\alpha)}{g} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v_0 \cdot sin(\alpha)}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \cdot sin^2(\alpha)}{2g}$$

Así finalmente tenemos que:

$$\boxed{h = \frac{v_0^2 \cdot sin^2(\alpha)}{2g}}$$

También podemos hacerlo de otra forma que es totalmente equivalente.

Forma 2:

Recordemos que las ecuaciones paramétricas para la primera piedra son:

$$x(t) = v_0 \cdot cos(\alpha) \cdot t$$

$$y(t) = v_0 \cdot sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Ahora como sabemos, la trayectoria de la piedra forma una parábola, y como sabemos el punto donde la piedra golpearía horizontalmente al pájaro sería cuando la piedra alcanzo su altura máxima (es decir cuando la piedra esta en el vértice de la parábola), y como sabemos el tiempo en que la piedra alcanza su altura máxima es:

$$t^* = \frac{v_0 \cdot sin(\alpha)}{g}$$

De este modo lo que necesitamos es que $y(t^*) = h$. Ahora calculamos $y(t^*)$ y obtenemos que:

$$y(t^*) = v_0 \cdot sin(\alpha) \cdot t^* - \frac{g}{2} \cdot t^{*2} = v_0 \cdot sin(\alpha) \cdot \frac{v_0 \cdot sin(\alpha)}{g} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v_0 \cdot sin(\alpha)}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \cdot sin^2(\alpha)}{2g}$$

Finalmente decimos que:

$$\boxed{h = \frac{v_0^2 \cdot sin^2(\alpha)}{2g}}$$

Problema 44.
Consideremos el problema del ejercicio 43. Si además de querer pegarle horizontalmente a el pájaro con la primera piedra, queremos pegarle a un conejo que esta a una distancia l. Determine el angulo α con el cual debe ser lanzada la piedra.

Solución:

Recordemos que las ecuaciones paramétricas para la primera piedra son:

$$x(t) = v_0 \cdot cos(\alpha) \cdot t$$

$$y(t) = v_0 \cdot sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Calcularemos el tiempo cuando la piedra vuelve al suelo tras ser lanzada, es decir necesitamos calcular t^* tal que: $y(t^*) = 0$. De este modo, nos queda la siguiente ecuación:

$$v_0 \cdot sin(\alpha) \cdot (t^*) - \frac{g}{2} \cdot (t^*)^2 = 0$$

Como $t^* \neq 0$, entonces:

$$t^* = \frac{2 \cdot v_0 \cdot sin(\alpha)}{g}$$

De este modo, para que la piedra impacte al conejo se debe cumplir que: $x(t^*) = l$. Ahora calcularemos $x(t^*)$:

$$x(t^*) = v_0 \cdot cos(\alpha) \cdot t^* = v_0 \cdot cos(\alpha) \cdot \frac{2 \cdot v_0 \cdot sin(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2 \cdot cos(\alpha) \cdot sin(\alpha)$$

Así de este modo se debe cumplir que:

$$\frac{v_0^2}{g} \cdot 2 \cdot cos(\alpha) \cdot sin(\alpha) = l$$

Pero solo estamos considerando que la piedra golpee al conejo, para que la piedra golpee al pajaro también, se determino en el ejercicio anterior que:

$$h = \frac{v_0^2 \cdot sin^2(\alpha)}{2g}$$

De este modo:

$$\frac{v_0^2}{g} = \frac{2h}{sin^2(\alpha)}$$

Así reemplazando esta expresión obtenida para que la piedra golpee al pajaro, en la que obtuvimos para que la piedra golpee al conejo, obtenemos que:

$$\frac{2h}{sin^2(\alpha)} \cdot 2 \cdot cos(\alpha) \cdot sin(\alpha) = l$$

De este modo:

$$4 \cdot h \cdot \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)} = l$$

Esto es lo mismo a decir que:

$$\frac{4 \cdot h}{l} = tan(\theta)$$

Así finalmente tenemos que:

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{4 \cdot h}{l}\right)$$

Problema 45.
Consideremos la misma situación que hemos estado analizando para la pregunta 44 y 43. Si se lanza la segunda piedra con un angulo β y rapidez v_0 en un instante diferente al que es lanzado la primera piedra, y sabemos que ambas piedras chocan en C. Determine el Δt entre los lanzamientos.

Solución:

Primero determinaremos las ecuaciones paramétricas para cada piedra.

Para la primera piedra tenemos que:

$$x_1(t) = v_0 \cdot cos(\alpha) \cdot t \qquad y_1(t) = v_0 \cdot sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$x_2(t) = v_0 \cdot cos(\beta) \cdot t \qquad y_2(t) = v_0 \cdot sin(\beta) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Digamos que la segunda piedra fue lanzada un Δt antes que la primera piedra, y que la primera piedra fue lanzada en el tiempo 0. Sea t el tiempo en que impactan ambas piedras. Entonces se debe cumplir que:

$$x_1(t) = x_2(t + \Delta t)$$

$$y_1(t) = y_2(t + \Delta t)$$

Esto tiene sentido, pues si ambas piedras impactan en el tiempo t, entonces es claro que las componentes para la primera piedra deben ser $x_1(t)$ y $y_1(t)$ en el momento del impacto. Y como la segunda piedra fue lanzada un Δt antes que la primera piedra, entonces el momento en que impacten ambas piedras, la segunda piedra tendrá la componente en y correspondiente a $y_2(t + \Delta t)$ y la componente en x correspondiente a $x_2(t + \Delta t)$, pues ha estado más tiempo en movimiento.

Ahora como sabemos la ecuaciones paramétricas para ambas piedras, las dos igualdades anteriores se convierten en:

$$v_0 \cdot cos(\alpha) \cdot t = v_0 \cdot cos(\beta) \cdot (t + \Delta t) \qquad (1)$$

$$v_0 \cdot sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 = v_0 \cdot sin(\beta) \cdot (t + \Delta t) - \frac{g}{2} \cdot (t + \Delta t)^2 \qquad (2)$$

De (1) obtenemos que:

$$\frac{cos(\alpha)}{cos(\beta)} \cdot t = t + \Delta t$$

Reemplazando esta expresión en (2) obtenemos que:

$$v_0 \cdot sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 = v_0 \cdot sin(\beta) \cdot \frac{cos(\alpha)}{cos(\beta)} \cdot t - \frac{g}{2} \cdot \frac{cos^2(\alpha)}{cos^2(\beta)} \cdot t^2$$

Consideremos a $t \neq 0$, por lo tanto:

$$v_0 \cdot sin(\alpha) - \frac{g}{2} \cdot t = v_0 \cdot sin(\beta) \cdot \frac{cos(\alpha)}{cos(\beta)} - \frac{g}{2} \cdot \frac{cos^2(\alpha)}{cos^2(\beta)} \cdot t$$

Esto es equivalente a que:

$$v_0 \cdot \left(sin(\alpha) - \frac{sin(\beta) \cdot cos(\alpha)}{cos(\beta)} \right) = \frac{g}{2} \cdot t \left(1 - \frac{cos^2(\alpha)}{cos^2(\beta)} \right)$$

Esto es lo mismo a que:

$$v_0 \cdot \left(\frac{sin(\alpha) \cdot cos(\beta) - sin(\beta) \cdot cos(\alpha)}{cos(\beta)} \right) = \frac{g}{2} \cdot t \left(\frac{cos^2(\beta) - cos^2(\alpha)}{cos^2(\beta)} \right)$$

Recordando que:

$sin(\alpha - \beta) = sin(\alpha) \cdot cos(\beta) - sin(\beta) \cdot cos(\alpha)$

$cos^2(\beta) - cos^2(\alpha) = [cos(\beta) - cos(\alpha)] \cdot [cos(\beta) + cos(\alpha)]$

Entonces tenemos que:

$$t = \frac{2 \cdot v_0 \cdot sin(\alpha - \beta) \cdot cos(\beta)}{g \cdot [cos(\beta) - cos(\alpha)] \cdot [cos(\beta) + cos(\alpha)]}$$

Recordando la ecuación (1) que nos dice que:

$$\frac{cos(\alpha)}{cos(\beta)} \cdot t = t + \Delta t$$

Entonces:

$$\Delta t = t \cdot \left(\frac{cos(\alpha) - cos(\beta)}{cos(\beta)} \right)$$

Reemplazando con el valor de t que calculamos anteriormente nos queda que:

$$\Delta t = \frac{2 \cdot v_0 \cdot sin(\alpha - \beta) \cdot cos(\beta)}{g \cdot [cos(\beta) - cos(\alpha)] \cdot [cos(\beta) + cos(\alpha)]} \cdot \left(\frac{cos(\alpha) - cos(\beta)}{cos(\beta)} \right) = -\frac{2 \cdot v_0 \cdot sin(\alpha - \beta)}{g \cdot [cos(\beta) + cos(\alpha)]}$$

Finalmente llegamos a que:

$$\Delta t = -\frac{2 \cdot v_0 \cdot sin(\alpha - \beta)}{g \cdot [cos(\beta) + cos(\alpha)]}$$

Ahora analicemos esta expresión para los diferentes casos de relaciones entre α y β.

Si $\alpha = \beta$, entonces $\alpha - \beta = 0$, de este modo: $sin(\alpha - \beta) = 0$, por lo tanto: $\Delta t = 0$. Así de este modo, ambas piedras tienen que ser lanzadas al mismo tiempo. Ahora notemos que si $\alpha = \beta$ y además se lanzan al mismo tiempo, entonces en toda la trayectoria chocan pues describen la misma trayectoria.

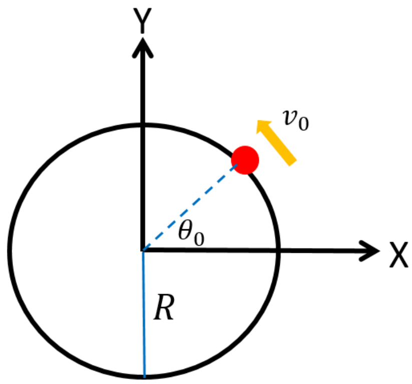
Si $\alpha < \beta$, entonces: $\alpha - \beta < 0$, por lo tanto: $sin(\alpha - \beta) < 0$, de este modo: $\Delta t > 0$, esto significa que efectivamente la segunda piedra fue lanzada antes que la primera piedra. Y el intevalo de tiempo en que se llevan ambas piedras esta dada por el Δt calculado anteriormente.

Si $\alpha > \beta$, entonces: $\alpha - \beta > 0$, por lo tanto: $sin(\alpha - \beta) > 0$, de este modo: $\Delta t < 0$, esto significa que la segunda piedra no se lanzo antes, sino que se lanzo después. Si nos piden Δt como el intervalo de tiempo que ocurre entre un lanzamiento y otro entonces nos estan pidiendo una cantidad positiva, la cual sería la misma calculada anteriormente pero sin el signo menos. Es decir:

$$\boxed{\Delta t = \frac{2 \cdot v_0 \cdot sin(\alpha - \beta)}{g \cdot [cos(\beta) + cos(\alpha)]}}$$

Asumiremos esta respuesta como correcta, pues en el dibujo se ve que: $\alpha > \beta$.

Problema 46.
Consideremos una partícula que se mueve en una circunferencia de radio R con una rapidez constante v_0. Su angulo inicial es θ_0 y gira en sentido antihorario. Determine $\theta(t)$.



Solución:

Usaremos coordenadas polares. Notemos que: $\boxed{\rho = R}$, por lo tanto: $\boxed{\dot{\rho} = 0}$

Ahora recordemos que:

$$v(\vec{t}) = \dot{\rho} \cdot \hat{\rho} + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{\theta}$$

De este modo:

$$v(\vec{t}) = R \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{\theta}$$

Así tenemos que:

$$\|v(\vec{t})\| = R \cdot |\dot{\theta}| \cdot \|\hat{\theta}\| = R \cdot |\dot{\theta}|$$

Como la particula gira en sentido antihorario, entonces $\dot{\theta} > 0$, por ende: $|\dot{\theta}| = \dot{\theta}$. Además como dicen que la rapidez es constante e igual a v_0, entonces tenemos que:

$$v_0 = R \cdot \dot{\theta}$$

Así tenemos que:

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{R}$$

Ahora la ecuación para determinar $\theta(t)$ es:

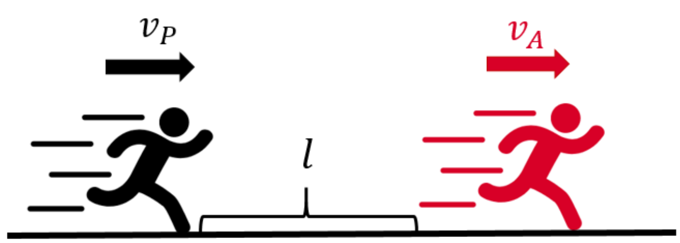
$$\theta(t) - \theta_0 = \int_0^t \dot{\theta} dx = \int_0^t \frac{v_0}{R} dx = \left(\frac{v_0}{R}\right) \cdot t$$

Finalmente:

$$\boxed{\theta(t) = \left(\frac{v_0}{R}\right) \cdot t + \theta_0}$$

Problema 47.

Alberto y Pedro estan compitiendo en una carrera. Alberto va más adelante que Pedro en una distancia l. Alberto lleva una velocidad v_A constante y pedro una velocidad v_P constante, tal que: $v_P > v_A$. En ese mismo instante en el cual la distancia que los separa es l, Pedro comienza a frenar con una aceleración de magnitud a. Determine la relación que debe existir entre v_P, v_A, a y l de modo que Pedro nunca alcance a Alberto.



Solución:

La posición en función del tiempo para Alberto es:

$$x_A(t) = l + v_A \cdot t$$

La posición en función del tiempo para Pedro es:

$$x_P(t) = v_P \cdot t - \frac{a}{2} \cdot t^2$$

Ahora para que Pedro nunca alcance a Alberto debe ocurrir que:

$$x_P(t) < x_A(t)$$

Esto es lo mismo a decir que:

$$v_P \cdot t - \frac{a}{2} \cdot t^2 < l + v_A \cdot t$$

Y esto es equivalente con:

$$-\frac{a}{2} \cdot t^2 + (v_P - v_A) \cdot t - l < 0$$

Sea $f(t) = -\frac{a}{2} \cdot t^2 + (v_P - v_A) \cdot t - l$, entonces lo que nos estan pidiendo es que: $f(t) < 0$ para todo t.

Como vemos $f(t)$ es una función cuadrática, es decir que se puede escribir de la forma $f(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2$, y para que $f(t) < 0$ para todo t, se debe cumplir que: $a_2 < 0$, es decir que la función es concava hacia abajo, y además de eso la función no debe tener intersección con el eje x, es decir que: $(a_1)^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2 < 0$.

Para este caso particular tenemos que: $a_2 = -\frac{a}{2}$, $a_1 = (v_P - v_A)$, y $a_0 = -l$. Notemos que: $a_2 = -\frac{a}{2} < 0$. Por lo tanto, ahora lo que se debe cumplir es que: $(a_1)^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2 < 0$, que para este caso particular es que:

$$(v_P - v_A)^2 - 4 \cdot (-l) \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) < 0$$

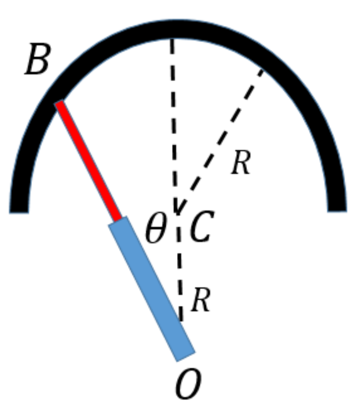
Que es equivalente con que:

$$(v_P - v_A)^2 - 2 \cdot l \cdot a < 0$$

Así finalmente tenemos que se debe cumplir que:

$$\boxed{\frac{(v_P - v_A)^2}{2 \cdot l} < a}$$

Problema 48.
Considere un brazo que se mueve a lo largo de la ranura circular fija que se muestra en la figura. El brazo esta compuesto por un parte de largo fijo y otra de largo variable tal que el rodillo B siempre este en la ranura circular. El brazo se mueve con una aceleración angular constante $\dot{\theta} = \omega$. Determine la aceleración.



Solución:

Notemos que el triangulo BCO es isósceles. Trazamos un punto E que esta en el punto medio de BO. De este modo, es claro que:

$$BE = R \cdot cos(\theta) \qquad EO = R \cdot cos(\theta)$$

Es claro que:

$$\rho = BE + EO = 2 \cdot R \cdot cos(\theta)$$

De este modo:

$$\boxed{\rho = 2 \cdot R \cdot cos(\theta)}$$

Además:

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d}{d\theta}(2 \cdot R \cdot cos(\theta)) \cdot \omega = -2 \cdot R \cdot sin(\theta) \cdot \omega$$

Así tenemos que:

$$\boxed{\dot{\rho} = -2 \cdot R \cdot \omega \cdot sin(\theta)}$$

También tenemos que:

$$\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{dt} = \left(\frac{d\dot{\rho}}{d\theta}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d}{d\theta}(-2 \cdot R \cdot \omega \cdot sin(\theta)) \cdot \omega = -2 \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \frac{d}{d\theta}(sin(\theta)) = -2 \cdot R \cdot \omega^2 \cdot cos(\theta)$$

De este modo:

$$\boxed{\ddot{\rho} = -2 \cdot R \cdot \omega^2 \cdot cos(\theta)}$$

Por enunciado tenemos que:

$$\boxed{\dot{\theta} = \omega}$$

Y además:

$$\boxed{\ddot{\theta} = 0}$$

Ahora sabemos que la aceleración en coordenadas polares esta dada por:

$$a(\vec{t}) = [\ddot{\rho} - \rho \cdot \dot{\theta}^2] \cdot \hat{\rho} + [2 \cdot \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta}] \cdot \hat{\theta}$$

Ahora procedemos a calcular:

$$\ddot{\rho} - \rho \cdot \dot{\theta}^2 = -2 \cdot R \cdot \omega^2 \cdot cos(\theta) - 2 \cdot R \cdot cos(\theta) \cdot \omega^2 = -4 \cdot R \cdot \omega^2 \cdot cos(\theta)$$

$$2 \cdot \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta} = 2 \cdot -2 \cdot R \cdot sin(\theta) \cdot \omega \cdot \omega = -4 \cdot R \cdot \omega^2 \cdot sin(\theta)$$

Así obtenemos que:

$$\vec{a(t)} = -4 \cdot R \cdot \omega^2 \cdot cos(\theta) \cdot \hat{\rho} - 4 \cdot R \cdot \omega^2 \cdot sin(\theta) \cdot \hat{\theta} = -4 \cdot R \cdot \omega^2 [cos(\theta) \cdot \hat{\rho} + sin(\theta) \cdot \hat{\theta}]$$

Ahora notemos que:

$$cos(\theta) \cdot \hat{\rho} + sin(\theta) \cdot \hat{\theta} = cos(\theta) \cdot (cos(\theta), sin(\theta)) + sin(\theta) \cdot (-sin(\theta), cos(\theta)) = (cos^2(\theta) - sin^2(\theta), 2 \cdot sin(\theta) \cdot cos(\theta))$$

Ahora recordando que: $cos(2\theta) = cos^2(\theta) - sin^2(\theta)$ y además que: $sin(2\theta) = 2 \cdot \sin(\theta) \cdot cos(\theta)$, entonces tenemos que:

$$cos(\theta) \cdot \hat{\rho} + sin(\theta) \cdot \hat{\theta} = (cos(2\theta), sin(2\theta))$$

Finalmente tenemos que:

$$\boxed{\vec{a(t)} = -4 \cdot R \cdot \omega^2 \cdot (cos(2\theta), sin(2\theta))}$$

Problema 49.

Considere un misil que es lanzado con un angulo θ de inclinación y con una velocidad inicial de magnitud v_0.

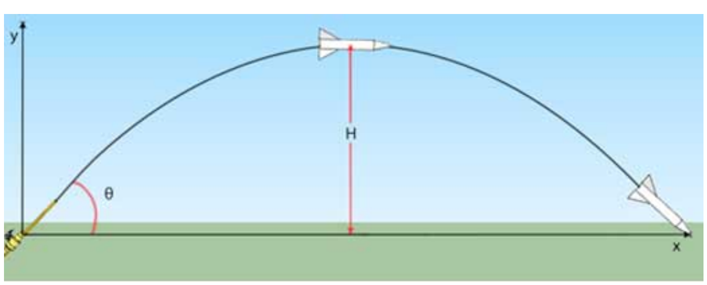
i) Obtenga sus ecuaciones parametricas de movimiento tanto para la coordenada en X, como para la coordenada en Y. Considere $t_0 = 0[s]$ y que el misil es lanzado desde el origen de nuestro sistema cartesiano.

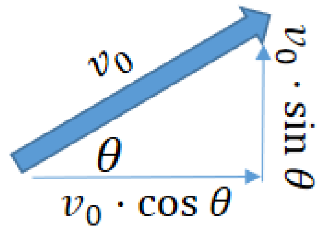
ii) Encuentre el tiempo que se tarda el misil en volver a $y = 0$ tras ser lanzado.

iii) Encuentre cuanta distancia en el eje X recorre el misil.

iv) Encuentre el angulo optimo de inclinación con el cual se debe lanzar el misil para recorrer la máxima distancia en el eje X.

v) ¿Cual es la máxima distancia posible que puede recorrer el misil en el eje X?





Solución:

i) Notemos que para el eje Y tenemos un movimiento uniformemente acelerado, mientras que en el eje X tenemos un movimiento con velocidad constante. Y como $t_0 = 0$[s]. Entonces:

$$y(t) = a_y\frac{t^2}{2} + v_{0y}t + y_0$$

$$x(t) = v_{0x}t + x_0$$

Ahora notemos que como en el eje Y esta actuando la aceleración hacia abajo, entonces: $a_y = -g$ y como el misil se lanza desde el origen de nuestro sistema cartesiano, entonces: $y_0 = 0$ y $x_0 = 0$.

Como el misil se lanza con un angulo de inclinación θ, y con una velocidad inicial de magnitud v_0, entonces podemos descomponer la velocidad en sus componentes X e Y. Así tenemos que: $v_{0x} = v_0cos(\theta)$, y $v_{0y} = v_0sin(\theta)$. Así de este modo:

$$\boxed{y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0sin(\theta)\cdot t}$$

$$\boxed{x(t) = v_0cos(\theta)\cdot t}$$

ii) El tiempo que se demora el misil en volver a $y = 0$ tras ser lanzado es un tiempo $t_2 \neq 0$ tal que: $y(t_2) = 0$. Ahora:

$$y(t_2) = -g\frac{t_2^2}{2} + v_0sin(\theta)\cdot t_2 = t_2\left[-g\frac{t_2}{2} + v_0sin(\theta)\right] = 0$$

Pero como $t_2 \neq 0$, entonces: $t_2 = \dfrac{2v_0sin(\theta)}{g}$

De este modo, el tiempo que se demora el misil en volver a $y = 0$ tras ser lanzado es:

$$\boxed{t_2 = \frac{2v_0 sin(\theta)}{g}}$$

iii) Se puede observar que la distancia que recorre el misil en el eje X es $x(t_2)$. De este modo:

$$x(t_2) = x\left(\frac{2v_0 sin(\theta)}{g}\right) = v_0 cos(\theta) \cdot \frac{2v_0 sin(\theta)}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2sin(\theta)cos(\theta)$$

Ahora recordando la formula de la suma de ángulos, la cual era:

$sin(\alpha + \beta) = sin(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sin(\beta)$

Tenemos que:

$sin(2\theta) = sin(\theta + \theta) = sin(\theta)cos(\theta) + cos(\theta)sin(\theta) = 2sin(\theta)cos(\theta)$

Así:

$sin(2\theta) = 2sin(\theta)cos(\theta)$

Así tenemos que:

$x(t_2) = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2sin(\theta)cos(\theta) = \frac{v_0^2}{g} sin(2\theta)$

Finalmente la distancia que recorre el misil en el eje X es:

$$\boxed{x_{rec} = \frac{v_0^2}{g} sin(2\theta)}$$

iv) Notemos que la distancia que recorre el misil en el eje X en función de θ es: $x_{rec}(\theta) = \frac{v_0^2}{g} sin(2\theta)$, y notemos que el angulo θ puede variar entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. De este modo, si buscamos el θ optimo sería el θ en el cual el misil recorre la mayor distancia posible. Así de este modo, queremos buscar el máximo de $h(\theta) = x_{rec}(\theta) = \frac{v_0^2}{g} sin(2\theta)$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Para resolver este problema pasaremos a buscar los $\theta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tales que: $h'(\theta_1) = 0$.

Como $h(\theta) = \frac{v_0^2}{g} sin(2\theta)$, entonces:

$$h'(\theta) = \frac{h(\theta)}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{v_0^2}{g}sin(2\theta)\right) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{d(sin(2\theta))}{d\theta} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{d(sin(2\theta))}{d(2\theta)} \cdot \frac{d(2\theta)}{d\theta} = \frac{v_0^2}{g}cos(2\theta) \cdot 2 = \frac{2v_0^2}{g} \cdot cos(2\theta)$$

Así tenemos que: $h'(\theta) = \frac{2v_0^2}{g} \cdot cos(2\theta)$, y como estamos buscando los $\theta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tales que: $h'(\theta_1) = 0$, entonces procederemos a resolver:

$h'(\theta_1) = \frac{2v_0^2}{g} \cdot cos(2\theta_1) = 0$ con $\theta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, esto es equivalente a resolver que: $cos(2\theta_1) = 0$ con $\theta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Sea $u = 2\theta_1$, entonces la ecuación que nos queda a resolver es: $cos(u) = 0$ y como $\theta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces: $0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$, por lo tanto: $0 \leq 2\theta_1 \leq \pi$ y como $u = 2\theta_1$, entonces: $0 \leq u \leq \pi$. De este modo: $u \in [0, \pi]$. Finalmente, la ecuación a resolver es:

$cos(u) = 0$ con $u \in [0, \pi]$

Es claro que la solución es $u = \frac{\pi}{2}$ y como $u = 2\theta_1$, entonces: $\frac{\pi}{2} = 2\theta_1$, así: $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$

Así el único punto critico de $h(\theta) = \frac{v_0^2}{g}sin(2\theta)$ con $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, es $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$. Ahora:

$$h(0) = \frac{v_0^2}{g}sin(2\theta) = \frac{v_0^2}{g}sin(2 \cdot 0) = \frac{v_0^2}{g}sin(0) = \frac{v_0^2}{g} \cdot 0 = 0$$

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{v_0^2}{g}sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = \frac{v_0^2}{g}sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{v_0^2}{g}$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_0^2}{g}sin(2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \frac{v_0^2}{g}sin(\pi) = \frac{v_0^2}{g} \cdot 0 = 0$$

Así: $h(0) = 0$, $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{v_0^2}{g}$, y $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Por lo tanto, la máxima distancia recorrida es: $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{v_0^2}{g}$.

Así, se obtuvo que el angulo optimo es:

$$\boxed{\theta_{optimo} = \frac{\pi}{4}}$$

v) Una vez que ya encontramos el ángulo optimo $\theta_{optimo} = \frac{\pi}{4}$, podemos encontrar la máxima distancia que puede recorrer el misil en el eje X, la cual sería:

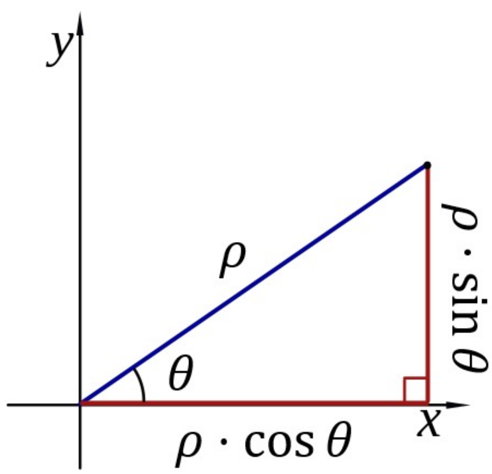
$$h\left(\theta_{optimo}\right) = h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{v_0^2}{g} sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) = \frac{v_0^2}{g} sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_0^2}{g}$$

Finalmente, la máxima distancia que puede recorrer el misil en el eje X es:

$$\boxed{x_{rec}\left(\theta_{optimo}\right) = \frac{v_0^2}{g}}$$

Problema 50.
Introduciremos el concepto de **coordenadas polares**.

Además del sistema coordenadas cartesianas, existe el sistema de coordenadas polares, el cual nos permite determinar la posición de una partícula, a partir de la distancia que se encuentra la partícula del origen, además del angulo que forma la partícula con el eje OX.



Notemos que por teorema de pitagoras se da que:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Y además que:

$$tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

Como en el sistema cartesiano tenemos 2 vectores ortonormales, necesitamos definir otros dos vectores ortonormales en coordenadas polares, los cuales son:

$$\hat{\rho} = (cos(\theta), sin(\theta))$$

$$\hat{\theta} = (-sin(\theta), cos(\theta))$$

Notemos que:

$\hat{\rho} \cdot \hat{\theta} = (cos(\theta), sin(\theta)) \cdot (-sin(\theta), cos(\theta)) = -cos(\theta)sin(\theta) + sin(\theta)cos(\theta) = 0$

Así: $\boxed{\hat{\rho} \cdot \hat{\theta} = 0}$

Además notemos que:

$\|\hat{\rho}\| = \sqrt{cos^2(\theta) + sin^2(\theta)}$

Y como sabemos, por identidad trigonométrica: $cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$. De este modo:

$\|\hat{\rho}\| = \sqrt{cos^2(\theta) + sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$

Así: $\boxed{\|\hat{\rho}\| = 1}$

Por otro lado, tenemos que:

$\|\hat{\theta}\| = \sqrt{[-sin(\theta)]^2 + [cos(\theta)]^2} = \sqrt{sin^2(\theta) + cos^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$

Así: $\boxed{\|\hat{\theta}\| = 1}$

Por lo tanto, los vectores $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$ son ortonormales, pues $\hat{\rho} \cdot \hat{\theta} = 0$, y además ambos vectores son unitarios, es decir, tienen norma 1

Introduciremos una notación la cual es:

Sea $f(t)$, entonces:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \dot{f}} \qquad \boxed{\frac{d^2f}{dt^2} = \ddot{f}}$$

La posición en función del tiempo esta dada por:

$\boxed{r(t) = \rho(t) \cdot \hat{\rho}}$

Muchas veces usaremos que $\rho = \rho(t)$

A partir de esto, deduzca la velocidad $v(t)$ y la aceleración $a(t)$ en función del tiempo en coordenadas polares.

Solución:

$$v(t) = \frac{dr(t)}{dt} = \frac{d[\rho(t) \cdot \hat{\rho}]}{dt} = \frac{d\rho(t)}{dt} \cdot \hat{\rho} + \rho(t) \cdot \frac{d\hat{\rho}}{dt}$$

Usando la notación que dimos anteriormente, tenemos que: $\frac{d\rho(t)}{dt} = \dot{\rho}$.

De este modo:

$$v(t) = \dot{\rho} \cdot \hat{\rho} + \rho(t) \cdot \frac{d\hat{\rho}}{dt}$$

Ahora:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d(cos(\theta), sin(\theta))}{dt} = \left(\frac{d(cos(\theta))}{dt}, \frac{d(sin(\theta))}{dt}\right)$$

Ahora usando la regla de la cadena, tenemos que:

$$\frac{d(cos(\theta))}{dt} = \frac{d(cos(\theta))}{d\theta} \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = -sin(\theta) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = -sin(\theta) \cdot \dot{\theta}$$

$$\frac{d(sin(\theta))}{dt} = \frac{d(sin(\theta))}{d\theta} \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = cos(\theta) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = cos(\theta) \cdot \dot{\theta}$$

De este modo:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \left(\frac{d(cos(\theta))}{dt}, \frac{d(sin(\theta))}{dt}\right) = \left(-sin(\theta) \cdot \dot{\theta}, cos(\theta) \cdot \dot{\theta}\right) = (-sin(\theta), cos(\theta)) \cdot \dot{\theta} = \hat{\theta} \cdot \dot{\theta}$$

Reemplazando tenemos que:

$$v(t) = \dot{\rho} \cdot \hat{\rho} + \rho(t) \cdot \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \dot{\rho} \cdot \hat{\rho} + \rho(t) \cdot \hat{\theta} \cdot \dot{\theta} = \dot{\rho} \cdot \hat{\rho} + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{\theta}$$

Finalmente, la velocidad en función del tiempo $v(t)$, en coordenadas polares es:

$$\boxed{v(t) = \dot{\rho} \cdot \hat{\rho} + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{\theta}}$$

Ahora calcularemos la aceleración $a(t)$ en función del tiempo:

$$a(t)=\frac{d[v(t)]}{dt}=\frac{d[\dot{\rho}\cdot\hat{\rho}+\rho\cdot\dot{\theta}\cdot\hat{\theta}]}{dt}=\frac{d[\dot{\rho}\cdot\hat{\rho}]}{dt}+\frac{d[\rho\cdot\dot{\theta}\cdot\hat{\theta}]}{dt}=\frac{d(\dot{\rho})}{dt}\cdot\hat{\rho}+\dot{\rho}\cdot\frac{d(\hat{\rho})}{dt}+\frac{d(\rho\cdot\dot{\theta})}{dt}\cdot\hat{\theta}+\rho\cdot\dot{\theta}\cdot\frac{d(\hat{\theta})}{dt}$$

Notemos que:

$$\frac{d(\dot{\rho})}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)=\frac{d^2\rho}{dt^2}=\ddot{\rho}$$

$$\frac{d(\hat{\rho})}{dt}=\dot{\theta}\cdot\hat{\theta}$$

$$\frac{d(\rho\cdot\dot{\theta})}{dt}=\rho\cdot\frac{d(\dot{\theta})}{dt}+\frac{d(\rho)}{dt}\cdot\dot{\theta}=\rho\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)+\dot{\rho}\cdot\dot{\theta}=\rho\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}+\dot{\rho}\cdot\dot{\theta}=\rho\cdot\ddot{\theta}+\dot{\rho}\cdot\dot{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt}=\left(\frac{d(-sin(\theta))}{dt},\frac{d(cos(\theta))}{dt}\right)$$

Ahora:

$$\frac{d(-sin(\theta))}{dt}=\frac{d(-sin(\theta))}{d\theta}\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)=-\frac{d(sin(\theta))}{d\theta}\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)=-cos(\theta)\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)=-cos(\theta)\cdot\dot{\theta}$$

$$\frac{d(cos(\theta))}{dt}=\frac{d(cos(\theta))}{d\theta}\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)=-sin(\theta)\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)=-sin(\theta)\cdot\dot{\theta}$$

Así:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt}=\left(\frac{d(-sin(\theta))}{dt},\frac{d(cos(\theta))}{dt}\right)=\left(-cos(\theta)\cdot\dot{\theta},-sin(\theta)\cdot\dot{\theta}\right)=-\left(cos(\theta)\cdot\dot{\theta},sin(\theta)\right)\cdot\dot{\theta}=-\hat{\rho}\cdot\dot{\theta}=-\dot{\theta}\cdot\hat{\rho}$$

Reemplazando tenemos que:

$$a(t)=\frac{d(\dot{\rho})}{dt}\cdot\hat{\rho}+\dot{\rho}\cdot\frac{d(\hat{\rho})}{dt}+\frac{d(\rho\cdot\dot{\theta})}{dt}\cdot\hat{\theta}+\rho\cdot\dot{\theta}\cdot\frac{d(\hat{\theta})}{dt}=\ddot{\rho}\cdot\hat{\rho}+\dot{\rho}\cdot\dot{\theta}\cdot\hat{\theta}+[\rho\cdot\ddot{\theta}+\dot{\rho}\cdot\dot{\theta}]\cdot\hat{\theta}+\rho\cdot\dot{\theta}\cdot[-\dot{\theta}\cdot\hat{\rho}]$$

$$=\ddot{\rho}\cdot\hat{\rho}+\dot{\rho}\cdot\dot{\theta}\cdot\hat{\theta}+\rho\cdot\ddot{\theta}\cdot\hat{\theta}+\dot{\rho}\cdot\dot{\theta}\cdot\hat{\theta}-\rho\cdot(\dot{\theta})^2\cdot\hat{\rho}=[\ddot{\rho}-\rho\cdot(\dot{\theta})^2]\cdot\hat{\rho}+[\dot{\rho}\cdot\dot{\theta}+\rho\cdot\ddot{\theta}+\dot{\rho}\cdot\dot{\theta}]\cdot\hat{\theta}$$

$$=[\ddot{\rho}-\rho\cdot(\dot{\theta})^2]\cdot\hat{\rho}+[2\dot{\rho}\cdot\dot{\theta}+\rho\cdot\ddot{\theta}]\cdot\hat{\theta}$$

Finalmente, tenemos que la aceleración en función del tiempo $a(t)$ en coordenadas polares es:

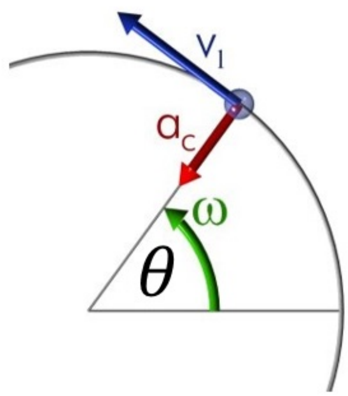
$$\boxed{a(t) = [\ddot{\rho} - \rho \cdot (\dot{\theta})^2] \cdot \hat{\rho} + [2\dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta}] \cdot \hat{\theta}}$$

Problema 51.
Considere una partícula que se esta en movimiento circular uniforme, en una órbita de radio R. Considere que el angulo inicial en $t_0 = 0\ [s]$ es $\theta(t_0) = \theta(0) = 0\ [rad]$ y que la velocidad angular es $\dfrac{d\theta}{dt} = w$. Considere que $R > 0$ y que $\omega > 0$

i) Calcule la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

ii) En que dirección apunta la velocidad y la aceleración.

iii) Encuentre la rapidez y la magnitud de la aceleración.



Solución:

i) Primero partiremos diciendo que usaremos coordenadas polares.

Notemos que el radio con el que gira la partícula es constante e igual a R, entonces tenemos que: $\rho(t) = R$.

Como nos dicen que $\theta(0) = 0$, entonces:

$$\theta(t) - \theta(0) = \int_0^t \omega\ du = \omega \cdot \int_0^t du = \omega \cdot u\Big]_0^t = \omega t$$

Por lo tanto: $\theta(t) = \omega t + \theta(0) = \omega t$

Así tenemos que:

$\rho(t) = R \;\Rightarrow\; \dot{\rho} = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{\rho} = 0$

$\theta(t) = \omega t \;\Rightarrow\; \dot{\theta} = \omega \;\Rightarrow\; \ddot{\theta} = 0$

Recordemos que en coordenadas polares, la posición en función del tiempo esta dada por: $r(t) = \rho \cdot \hat{\rho}$, y reemplazando con los datos del problema tenemos que la posición en función del tiempo $r(t)$ es:

$$\boxed{r(t) = R \cdot \hat{\rho}}$$

Tambien, en coordenadas polares la velocidad en función del tiempo esta dada por: $v(t) = \dot{\rho} \cdot \hat{\rho} + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{\theta}$ y reemplazando con los datos del problema tenemos que la velocidad en función del tiempo $v(t)$ es:

$$\boxed{v(t) = R \cdot \omega \cdot \hat{\theta}}$$

Finalmente, en coordenadas polares la aceleración en función del tiempo esta dada por: $a(t) = [\ddot{\rho} - \rho \cdot (\dot{\theta})^2] \cdot \hat{\rho} + [2\dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta}] \cdot \hat{\theta}$ y reemplazando con los datos del problema tenemos que la aceleración en función del tiempo $a(t)$ es:

$$\boxed{a(t) = -R \cdot \omega^2 \cdot \hat{\rho}}$$

ii) La velocidad apunta en la dirección de $\hat{\theta}$, mientras que la aceleración apunta en la dirección de $-\hat{\rho}$, es por esto que se dice que la aceleración es centripeta.

iii) Sabemos que: $v(t) = R \cdot \omega \cdot \hat{\theta}$ y que $a(t) = -R \cdot \omega^2 \cdot \hat{\rho}$. De este modo, la rapidez esta dada por:

$\|v(t)\| = \|R \cdot \omega \cdot \hat{\theta}\| = |R\omega|\|\hat{\theta}\| = |R\omega|$, y como $R > 0$ y $\omega > 0$, entonces:

La rapidez es: $\|v(t)\| = R\omega$

Por otro lado, la magnitud de la aceleración esta dada por:

$\|a(t)\| = \| - R \cdot \omega^2 \cdot \hat{\rho}\| = |R\omega^2|\|\hat{\rho}\| = |R\omega^2|$ y como $R > 0$ y $\omega > 0$, entonces, tenemos que:

La magnitud de la aceleración es: $\|a(t)\| = R\omega^2$

Problema 52.
Considere una partícula que esta en movimiento circular uniforme (MCU). La particula describe un circulo de radio $5[m]$, además se sabe que en $t_1 = 2[s]$, el angulo medido fue de $\theta(t_1) = \frac{\pi}{4}$ y que en $t_2 = 3[s]$, el angulo

medido fue de $\theta(t_2) = \frac{\pi}{2}$. Obtenga la rapidez y la magnitud de la aceleración.

Solución:

Recordemos que la rapidez estaba dada por: $\|v(t)\| = R\omega$, mientras que la magnitud de la aceleración estaba dada por: $\|a(t)\| = R\omega^2$. Notemos que $R = 5[m]$. Ahora nos falta determinar ω. Notemos que como $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ y como ω **es constante**, entonces:

$$\omega = \frac{\theta(t_2) - \theta(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}{3 - 2}\left[\tfrac{rad}{s}\right] = \frac{\frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{4}}{1}\left[\tfrac{rad}{s}\right] = \tfrac{\pi}{4}\left[\tfrac{rad}{s}\right]$$

Así tenemos que: $R = 5[m]$ y $\omega = \frac{\pi}{4}\left[\frac{rad}{s}\right]$

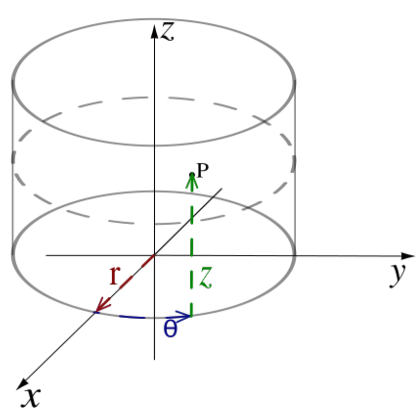
La rapidez es: $\|v(t)\| = R\omega = 5 \cdot \frac{\pi}{4}\left[\frac{m}{s}\right] = 3,93\left[\frac{m}{s}\right]$

La magnitud de la aceleración es: $\|a(t)\| = R\omega^2 = 5 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\left[\frac{m}{s}\right] = \frac{5\pi^2}{16}\left[\frac{m}{s}\right] = 3,08\left[\frac{m}{s}\right]$

Problema 53.

Ahora introduciremos el concepto de **coordenadas cilíndricas**

Cuando estamos en $3D$ nosotros podemos determinar la posición de una particula en coordenadas cartesianas que serían los ejes X, Y, y Z. Pero también se puede determinar la posición considerando la altura Z y además, si proyectamos en el plano XY, utilizamos la coordenadas cartesianas como se muestra en la siguiente imagen:



Entonces tenemos que:

$$\boxed{r(t) = \rho \cdot \hat{\rho} + z \cdot \hat{k}}$$

A partir de esto, derive la velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas.

Solución:

Tenemos que:

$r(t) = \rho \cdot \hat{\rho} + z \cdot \hat{k}$

De este modo:

$$v(t) = \frac{d(r(t))}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho \cdot \hat{\rho} + z \cdot \hat{k}\right) = \frac{d}{dt}(\rho \cdot \hat{\rho}) + \frac{d(z \cdot \hat{k})}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho \cdot \hat{\rho}) + \frac{dz}{dt} \cdot \hat{k} = \frac{d}{dt}(\rho \cdot \hat{\rho}) + \dot{z} \cdot \hat{k}$$

Del resultado de coordenadas polares tenemos que:

$$\frac{d(\rho \cdot \hat{\rho})}{dt} = \dot{\rho} \cdot \hat{\rho} + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{\theta}$$

Así tenemos que:

$$\boxed{v(t) = \dot{\rho} \cdot \hat{\rho} + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{\theta} + \dot{z} \cdot \hat{k}}$$

Como teníamos que:

$v(t) = \frac{d}{dt}(\rho \cdot \hat{\rho}) + \dot{z} \cdot \hat{k}$

Entonces:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(\rho \cdot \hat{\rho}) + \dot{z} \cdot \hat{k}\right) = \frac{d^2}{dt^2}(\rho \cdot \hat{\rho}) + \frac{d}{dt}(\dot{z} \cdot \hat{k}) = \frac{d^2}{dt^2}(\rho \cdot \hat{\rho}) + \left(\frac{d}{dt}(\dot{z})\right) \cdot \hat{k}$$

Ahora notemos que:

$$\frac{d(\dot{(z)})}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d^2}{dt^2}(z) = \ddot{z}$$

Y de coordenadas polares tenemos que:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\rho \cdot \hat{\rho}) = [\ddot{\rho} - \rho \cdot (\dot{\theta})^2] \cdot \hat{\rho} + [2\dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta}] \cdot \hat{\theta}$$

De este modo:

$$\boxed{a(t) = [\ddot{\rho} - \rho \cdot (\dot{\theta})^2] \cdot \hat{\rho} + [2\dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta}] \cdot \hat{\theta} + \ddot{z} \cdot \hat{k}}$$

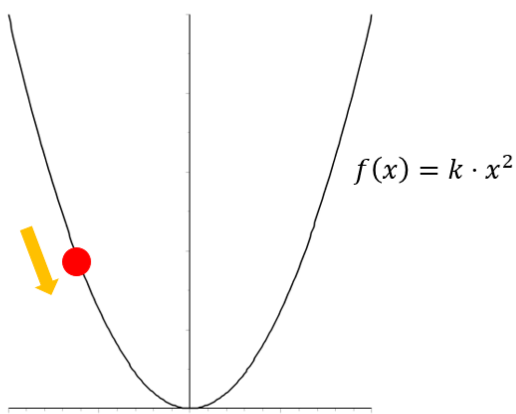
Problema 54.

Considere una partícula que se mueve en una trayectoria parabólica con velocidad v_0 contante (Como se muestra en la figura).

a) Encuentre una expresión para la velocidad.

b) Encuentre una expresión para la aceleración.

c) Calcule $v(\vec{t}) \cdot a(\vec{t})$.



Solución:

a) Consideremos la parábola $f(x) = kx^2$. Notemos que:

$$r(\vec{t}) = x \cdot \hat{i} + kx^2\hat{j}$$

De este modo:

$$v(\vec{t}) = \frac{dr(\vec{t})}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x \cdot \hat{i} + kx^2\hat{j}\right) = \left[\frac{dx}{dt}\right] \cdot \hat{i} + \left[\frac{d(kx^2)}{dt}\right]\hat{j}$$

Ahora:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

Y también:

$$\frac{d(kx^2)}{dt} = \left(\frac{d(kx^2)}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) = 2kx\dot{x}$$

Así tenemos que:

$$\vec{v(t)} = \dot{x}\cdot\hat{i} + 2kx\dot{x}\cdot\hat{j} = \dot{x}[\hat{i} + 2kx\cdot\hat{j}]$$

Ahora tenemos que:

$$\|\vec{v(t)}\| = |\dot{x}|\sqrt{1+4k^2x^2}$$

Ahora como la partícula se mueve hacia la derecha, entonces: $\dot{x} > 0$, por lo tanto: $|\dot{x}| = \dot{x}$. Además como la rapidez es constante e igual a v_0, entonces:

$$\boxed{\dot{x} = \frac{v_0}{\sqrt{1+4k^2x^2}}}$$

De este modo:

$$\boxed{\vec{v(t)} = \left(\frac{v_0}{\sqrt{1+4k^2x^2}}\right)\cdot[\hat{i} + 2kx\cdot\hat{j}]}$$

b) Recordando que:

$$\vec{v(t)} = \dot{x}\cdot\hat{i} + 2kx\dot{x}\cdot\hat{j}$$

Ahora, tenemos que:

$$\vec{a(t)} = \frac{d\vec{v(t)}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\cdot\hat{i} + 2kx\dot{x}\cdot\hat{j}\right) = \left[\frac{d\dot{x}}{dt}\right]\cdot\hat{i} + \left[\frac{d(2kx\dot{x})}{dt}\right]\cdot\hat{j}$$

Ahora:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x}$$

Además:

$$\frac{d(2kx\dot{x})}{dt} = 2k\frac{d(x\dot{x})}{dt} = 2k\left[x\frac{d(\dot{x})}{dt} + \dot{x}\frac{d(x)}{dt}\right] = 2k[x\ddot{x} + (\dot{x})^2]$$

Así tenemos que:

$$\vec{a(t)} = \ddot{x} \cdot \hat{i} + 2k[x\ddot{x} + (\dot{x})^2] \cdot \hat{j}$$

Ahora a partir de la ecuación:

$$\dot{x} = \frac{v_0}{\sqrt{1 + 4k^2x^2}}$$

Tenemos que:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \left[\frac{d}{dx}(\dot{x})\right] \cdot \left[\frac{dx}{dt}\right] = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{v_0}{\sqrt{1+4k^2x^2}}\right)\right] \cdot \left[\frac{dx}{dt}\right] = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{v_0}{\sqrt{1+4k^2x^2}}\right)\right] \dot{x} = -\frac{4k^2v_0x}{(\sqrt{1+4k^2x^2})^3} \cdot \dot{x}$$

$$= -\frac{4k^2v_0x}{(\sqrt{1+4k^2x^2})^3} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{1+4k^2x^2}} = -\frac{4k^2v_0^2x}{(1+4k^2x^2)^2}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{4k^2v_0^2x}{(1+4k^2x^2)^2}}$$

Así tenemos que:

$$\vec{a(t)} = \ddot{x} \cdot \hat{i} + 2k[x\ddot{x} + (\dot{x})^2] \cdot \hat{j} = -\frac{4k^2v_0^2x}{(1+4k^2x^2)^2} \cdot \hat{i} + 2k\left[-\frac{4k^2v_0^2x^2}{(1+4k^2x^2)^2} + \frac{v_0^2}{1+4k^2x^2}\right] \cdot \hat{j}$$

$$= -\frac{4k^2v_0^2x}{(1+4k^2x^2)^2} \cdot \hat{i} + 2k\left[-\frac{4k^2v_0^2x^2}{(1+4k^2x^2)^2} + \frac{v_0^2(1+4k^2x^2)}{(1+4k^2x^2)^2}\right] \cdot \hat{j} = -\frac{4k^2v_0^2x}{(1+4k^2x^2)^2} \cdot \hat{i} + \left(\frac{2kv_0^2}{(1+4k^2x^2)^2}\right) \cdot \hat{j}$$

$$= \frac{2kv_0^2}{(1+4k^2x^2)^2}[-2kx \cdot \hat{i} + \hat{j}]$$

Así finalmente tenemos que:

$$\boxed{\vec{a(t)} = \frac{2kv_0^2}{(1+4k^2x^2)^2}[-2kx \cdot \hat{i} + \hat{j}]}$$

c) Ahora tenemos que calcular $\vec{v(t)} \cdot \vec{a(t)}$. Recordando que:

$$\vec{v(t)} = \left(\frac{v_0}{\sqrt{1+4k^2x^2}}\right) \cdot [\hat{i} + 2kx \cdot \hat{j}]$$

$$\vec{a(t)} = \frac{2kv_0^2}{(1+4k^2x^2)^2}[-2kx \cdot \hat{i} + \hat{j}]$$

De este modo:

$$\vec{v(t)}\cdot\vec{a(t)} = \left(\frac{v_0}{\sqrt{1+4k^2x^2}}\right)\cdot[\hat{i}+2kx\cdot\hat{j}]\cdot\frac{2kv_0^2}{(1+4k^2x^2)^2}[-2kx\cdot\hat{i}+\hat{j}] = \left(\frac{v_0}{\sqrt{1+4k^2x^2}}\right)\cdot\frac{2kv_0^2}{(1+4k^2x^2)^2}[-2kx\cdot\hat{i}+\hat{j}][\hat{i}+2kx\cdot\hat{j}]$$

$$= \left(\frac{v_0}{\sqrt{1+4k^2x^2}}\right)\cdot\frac{2kv_0^2}{(1+4k^2x^2)^2}[-2kx+2kx] = 0$$

Así tenemos finalmente que:

$$\boxed{\vec{v(t)}\cdot\vec{a(t)} = 0}$$

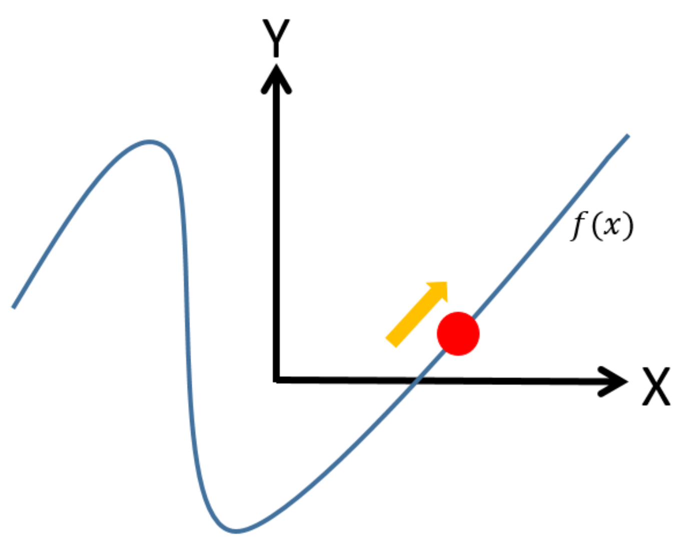
Problema 55.

Considere una partícula que se mueve en una trayectoria según la curva $y = f(x)$ con una rapidez constante v_0.

a) Determine la velocidad.

b) Determine la aceleración.

c) Determine $\vec{a(t)}\cdot\vec{v(t)}$



Solución:

a) Notemos que la posición en función del tiempo esta dada por:

$$\vec{r(t)} = x \cdot \hat{i} + f(x) \cdot \hat{j}$$

De este modo:

$$\vec{v(t)} = \frac{d\vec{r(t)}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x \cdot \hat{i} + f(x) \cdot \hat{j}\right) = \left[\frac{dx}{dt}\right] \cdot \hat{i} + \left[\frac{d(f(x))}{dt}\right] \hat{j}$$

Ahora:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

Y también:

$$\frac{d(f(x))}{dt} = \left(\frac{d(f(x))}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) = f'(x)\dot{x}$$

Así tenemos que:

$$\vec{v(t)} = \dot{x} \cdot \hat{i} + f'(x)\dot{x} \cdot \hat{j} = \dot{x}[\hat{i} + f'(x) \cdot \hat{j}]$$

Ahora tenemos que:

$$\|\vec{v(t)}\| = |\dot{x}|\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

Ahora como la partícula se mueve hacia la derecha, entonces: $\dot{x} > 0$, por lo tanto: $|\dot{x}| = \dot{x}$. Además como la rapidez es constante e igual a v_0, entonces:

$$\boxed{\dot{x} = \frac{v_0}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}}$$

De este modo:

$$\boxed{\vec{v(t)} = \left(\frac{v_0}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}\right) \cdot [\hat{i} + f'(x) \cdot \hat{j}]}$$

b) Recordando que:

$$\vec{v(t)} = \dot{x} \cdot \hat{i} + f'(x)\dot{x} \cdot \hat{j}$$

Ahora, tenemos que:

$$\vec{a(t)} = \frac{d\vec{v(t)}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x} \cdot \hat{i} + f'(x)\dot{x} \cdot \hat{j}\right) = \left[\frac{d\dot{x}}{dt}\right] \cdot \hat{i} + \left[\frac{d(f'(x)\dot{x})}{dt}\right] \cdot \hat{j}$$

Ahora:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x}$$

Además:

$$\frac{d(f'(x)\dot{x})}{dt} = \left[f'(x)\frac{d(\dot{x})}{dt} + \dot{x}\frac{d(f'(x))}{dt}\right] = \left[f'(x)\ddot{x} + \dot{x}\left(\frac{d(f'(x))}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)\right] = \left[f'(x)\ddot{x} + \dot{x}f''(x)\dot{x}\right] = \left[f'(x)\ddot{x} + f''(x)(\dot{x})^2\right]$$

Así tenemos que:

$$a(\vec{t}) = \ddot{x}\cdot\hat{i} + \left[f'(x)\ddot{x} + f''(x)(\dot{x})^2\right]\cdot\hat{j}$$

Ahora a partir de la ecuación:

$$\dot{x} = \frac{v_0}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}$$

Tenemos que:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \left[\frac{d}{dx}(\dot{x})\right]\cdot\left[\frac{dx}{dt}\right] = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{v_0}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}\right)\right]\cdot\left[\frac{dx}{dt}\right] = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{v_0}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}\right)\right]\dot{x}$$

$$= \left[\frac{d}{d(f'(x))}\left(\frac{v_0}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}\right)\right]\frac{df'(x)}{dx}\dot{x} = -\left[\frac{v_0 f'(x)}{(\sqrt{1+[f'(x)]^2})^3}\right]f''(x)\dot{x} = -\left[\frac{v_0 f'(x)}{(\sqrt{1+[f'(x)]^2})^3}\right]f''(x)\frac{v_0}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}$$

$$= -\left[\frac{v_0^2}{(1+[f'(x)]^2)^2}\right]f'(x)f''(x)$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\ddot{x} = -\left[\frac{v_0^2}{(1+[f'(x)]^2)^2}\right]f'(x)f''(x)}$$

Así tenemos que:

$$a(\vec{t}) = \ddot{x}\cdot\hat{i} + \left[f'(x)\ddot{x} + f''(x)(\dot{x})^2\right]$$

$$= -\left(\left[\frac{v_0^2}{(1+[f'(x)]^2)^2}\right]f'(x)f''(x)\right)\cdot\hat{i} + \left(-\left[\frac{v_0^2}{(1+[f'(x)]^2)^2}\right][f'(x)]^2 f''(x) + \frac{v_0^2}{(1+[f'(x)]^2)}f''(x)\right)\cdot\hat{j}$$

$$= -\left(\left[\frac{v_0^2}{(1+[f'(x)]^2)^2}\right] f'(x)f''(x)\right)\cdot\hat{i} + \left(\left[\frac{v_0^2 f''(x)}{(1+[f'(x)]^2)^2}\right]\right)\cdot\hat{j}$$

$$= \frac{v_0^2 f''(x)}{(1+[f'(x)]^2)^2}[-f'(x)\cdot\hat{i}+\hat{j}]$$

Así finalmente tenemos que:

$$\boxed{a(\vec{t}) = \frac{v_0^2 f''(x)}{(1+[f'(x)]^2)^2}[-f'(x)\cdot\hat{i}+\hat{j}]}$$

c) Ahora tenemos que calcular $v(\vec{t})\cdot a(\vec{t})$. Recordando que:

$$v(\vec{t}) = \left(\frac{v_0}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}\right)\cdot[\hat{i}+f'(x)\cdot\hat{j}]$$

$$a(\vec{t}) = \frac{v_0^2 f''(x)}{(1+[f'(x)]^2)^2}[-f'(x)\cdot\hat{i}+\hat{j}]$$

Ahora:

$$v(\vec{t})\cdot a(\vec{t}) = \left(\frac{v_0}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}\right)\cdot[\hat{i}+f'(x)\cdot\hat{j}]\frac{v_0^2 f''(x)}{(1+[f'(x)]^2)^2}[-f'(x)\cdot\hat{i}+\hat{j}]$$

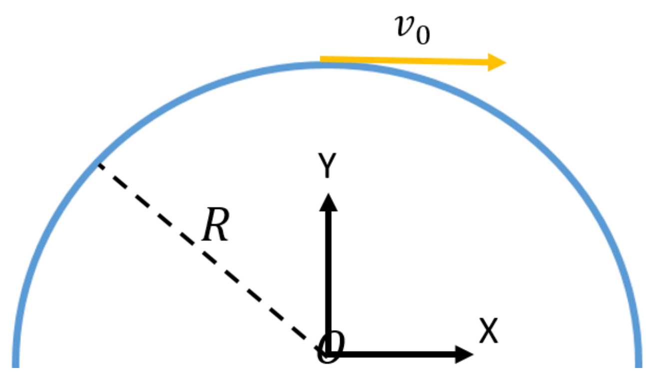
$$= \left(\frac{v_0}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}\right)\cdot\frac{v_0^2 f''(x)}{(1+[f'(x)]^2)^2}[\hat{i}+f'(x)\cdot\hat{j}]\cdot[-f'(x)\cdot\hat{i}+\hat{j}]$$

$$= \left(\frac{v_0}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}\right)\cdot\frac{v_0^2 f''(x)}{(1+[f'(x)]^2)^2}[-f'(x)+f'(x)] = 0$$

Así tenemos finalmente que:

$$\boxed{v(\vec{t})\cdot a(\vec{t}) = 0}$$

Problema 56.
Considere una persona que se para sobre una semiesfera de radio R. La persona patea una pelota en dirección horizontal con una velocidad v_0. Determine el mínimo valor que puede tener v_0 de modo que la pelota no toque nunca la semiesfera.



Solución:
Consideremos al origen como el punto O de la figura. Notemos que las ecuaciones de movimiento para la pelota serían:

$$x(t) = v_0 \cdot t$$

$$y(t) = R - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Ahora notemos que la ecuación que describe la semiesfera esta dada por:

$$y_1(t) = y_1(x(t)) = \sqrt{R^2 - x(t)^2} = \sqrt{R^2 - v_0^2 \cdot t^2}$$

Ahora para que la pelota nunca toque la semiesfera, debe ocurrir que para todo tiempo:

$$y(t) \geq y_1(t)$$

$$R - \frac{g}{2} \cdot t^2 \geq \sqrt{R^2 - v_0^2 \cdot t^2}$$

Ahora elevaremos ambos lados al cuadrado. De este modo:

$$R^2 - R \cdot g \cdot t^2 + \frac{g^2}{4} \cdot t^4 \geq R^2 - v_0^2 \cdot t^2$$

$$-R \cdot g \cdot t^2 + \frac{g^2}{4} \cdot t^4 \geq -v_0^2 \cdot t^2$$

$$\frac{g^2}{4} \cdot t^4 - R \cdot g \cdot t^2 + v_0^2 \cdot t^2 \geq 0$$

$$t^2 \left[\frac{g^2}{4} \cdot t^2 + (v_0^2 - R \cdot g) \right] \geq 0$$

Como $t^2 \geq 0$, entonces:

$$\frac{g^2}{4} \cdot t^2 + (v_0^2 - R \cdot g) \geq 0$$

Ahora notemos que $\frac{g^2}{4} \cdot t^2 + (v_0^2 - R \cdot g)$ es una función cuadrática, por ende para que sea mayor o igual a cero para todo t, entonces debe ocurrir que: $v_0^2 - R \cdot g \geq 0$ y como $v_0 \geq 0$, entonces: $v_0 \geq \sqrt{Rg}$

Finalmente tenemos que la velocidad mínima para que la pelota nunca toque la semiesfera es:

$$\boxed{v_{min} = \sqrt{Rg}}$$

Problema 57.
Considere el mismo problema analizado anteriormente. Utilizando la velocidad mínima calculada anteriormente, determine cual es la distancia a la base de la semiesfera a la que cae la pelota.

Solución:
Utilizando la velocidad inicial calculada anteriormente, tenemos que la ecuaciones de movimiento son:

$$x(t) = \sqrt{Rg} \cdot t$$

$$y(t) = R - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Sea t' el instante en que la pelota cae al suelo, notemos que debe ocurrir que: $y(t') = 0$

De este modo:

$$0 = y(t') = R - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Ahora como $t' > 0$, entonces tenemos que:

$$t' = \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

De este modo, la distancia respecto al origen a la que cae la pelota es: $x(t') = d$

De este modo:

$$d = x(t') = \sqrt{Rg} \cdot t' = \sqrt{Rg} \cdot \sqrt{\frac{2R}{g}} = \sqrt{2} \cdot R$$

Ahora la distancia a la base de la semiesfera es:

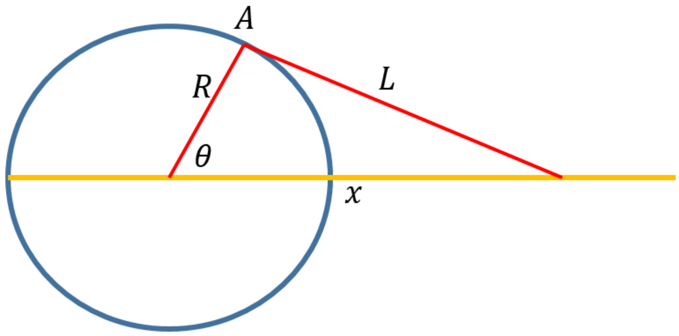
$$d - R = \sqrt{2} \cdot R - R = [\sqrt{2} - 1] \cdot R$$

Finalmente, la distancia de la pelota a la base de la semiesfera una vez que toca el suelo es:

$$\boxed{[\sqrt{2} - 1] \cdot R}$$

Problema 58.
Considere una circunferencia de radio R, la cual en el punto A tiene apoyada un extremo de una barra de largo

L. El otro extremo de esta barra de largo L puede deslizarse por un riel horizontal que pasa por el centro de la circunferencia.



Determine x en función de R, θ y L

Solución:
Utilizando el teorema del coseno tenemos que:

$L^2 = x^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot x \cdot cos(\theta)$

De este modo:

$x^2 + x \cdot [-2 \cdot R \cdot cos(\theta)] + [R^2 - L^2] = 0$

Ahora esta es una ecuación de segundo grado para x con $a = 1$, $b = -2 \cdot R \cdot cos(\theta)$ y $c = R^2 - L^2$

De este modo:

$$x_{1,2} = \frac{2 \cdot R \cdot cos(\theta) \pm \sqrt{4 \cdot R^2 \cdot cos^2(\theta) - 4 \cdot (R^2 - L^2)}}{2} = R \cdot cos(\theta) \pm \sqrt{R^2 \cdot cos^2(\theta) + L^2 - R^2}$$

Notemos que cuando $\theta = 0$, $x = R + L$, por lo tanto, evaluaremos ambas soluciones en $\theta = 0$

$$x_1(\theta) = R \cdot cos(\theta) - \sqrt{R^2 \cdot cos^2(\theta) + L^2 - R^2} \;\Rightarrow\; x_1(0) = R \cdot cos(0) - \sqrt{R^2 \cdot cos^2(0) + L^2 - R^2}$$

$$= R - \sqrt{R^2 + L^2 - R^2} = R - \sqrt{L^2} = R - L \;\Rightarrow\; \boxed{x_1(0) = R - L}$$

$$x_2(\theta) = R \cdot cos(\theta) + \sqrt{R^2 \cdot cos^2(\theta) + L^2 - R^2} \;\Rightarrow\; x_2(0) = R \cdot cos(0) + \sqrt{R^2 \cdot cos^2(0) + L^2 - R^2}$$

$$= R + \sqrt{R^2 + L^2 - R^2} = R + \sqrt{L^2} = R + L \;\Rightarrow\; \boxed{x_2(0) = R + L}$$

Asi tenemos que la solución valida es $x_2(\theta)$

De este modo:

$x_2(\theta) = R \cdot cos(\theta) + \sqrt{R^2 \cdot cos^2(\theta) + L^2 - R^2}$

Ahora notemos que para que la raíz este definida debe ocurrir que: $R^2 \cdot cos^2(\theta) + L^2 - R^2 \geq 0$

El menor valor que puede tener $R^2 \cdot cos^2(\theta) + L^2 - R^2$ es cuando $cos(\theta) = 0$, que tendría el valor de: $L^2 - R^2$ y como esta expresión debe ser mayor que 0, entonces debe ocurrir que:

$L^2 - R^2 \geq 0 \;\Rightarrow L \geq R$

Finalmente tenemos que:

$$\boxed{x(\theta) = R \cdot cos(\theta) + \sqrt{R^2 \cdot cos^2(\theta) + L^2 - R^2} \quad con \quad L \geq R}$$

Problema 59.
Considere el mismo problema que se estudio anteriormente. Ahora la circunferencia gira con una velocidad angular constante ω, determine la velocidad con la que se mueve la barra.

Solución:
Recordemos la definición de velocidad:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Utilizando la regla de la cadena tenemos que:

$$v = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{d\theta}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

Ahora como la velocidad angular es constante e igual a ω, entonces tenemoms que:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

De este modo:

$$v = \left(\frac{dx}{d\theta}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \omega \cdot \left(\frac{dx}{d\theta}\right)$$

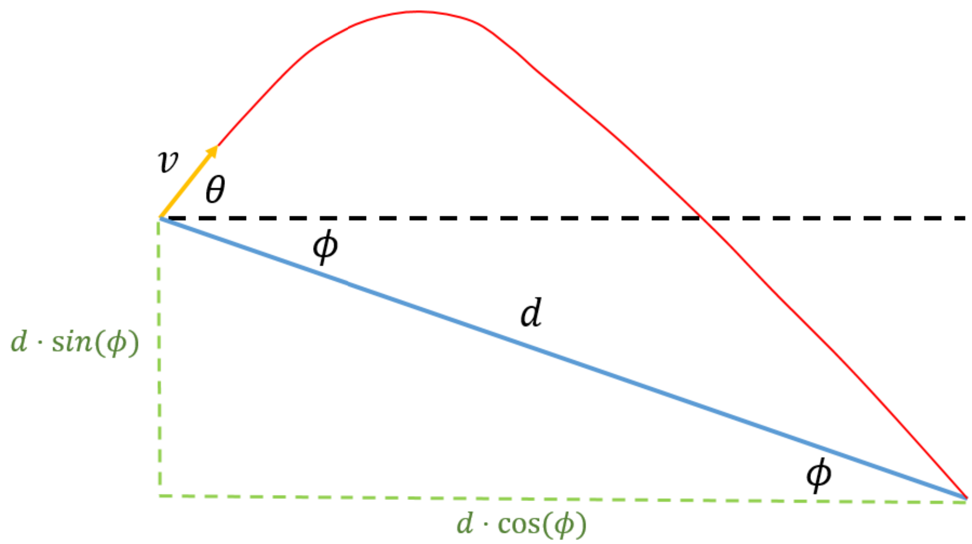
Ahora tenemos que:

$$\frac{dx}{d\theta} = -R \cdot sin(\theta) - \frac{R^2 \cdot cos(\theta) \cdot sin(\theta)}{\sqrt{R^2 \cdot cos^2(\theta) + L^2 - R^2}}$$

Finalmente, la velocidad es:

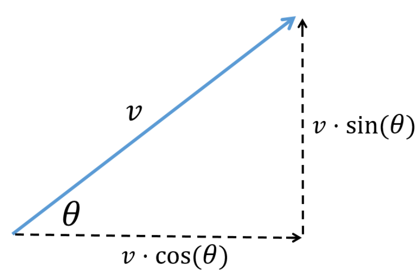
$$\boxed{v = -R \cdot \omega \cdot sin(\theta) - \frac{R^2 \cdot \omega \cdot cos(\theta) \cdot sin(\theta)}{\sqrt{R^2 \cdot cos^2(\theta) + L^2 - R^2}}}$$

Problema 60.
Considere un esquiador que va a saltar con una velocidad v y un angulo de inclinación de θ. Considere que la pista sobre la que va a caer forma un angulo de ϕ con respecto a la horizontal, como se muestra en la figura:



Determine la distancia d del punto de salto a la que cae el esquiador.

Solución:
Primero partiremos descomponiendo la velocidad



Consideraremos como punto origen al punto de salto, y además como la única aceleración que esta actuando es la gravedad, entonces tenemos que la ecuaciones del movimiento están dadas por:

$$x(t) = v \cdot cos(\theta) \cdot t$$

$$y(t) = v \cdot sin(\theta) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Sea t' el tiempo en que el esquiador hace contacto con la pista, entonces tenemos que: $x(t') = d \cdot cos(\phi)$, $y(t') = -d \cdot sin(\phi)$. Ahora despejaremos t', utilizando que $x(t') = d \cdot cos(\phi)$. De este modo:

$$d \cdot cos(\phi) = v \cdot cos(\theta) \cdot t'$$

De este modo:

$$t' = \frac{d \cdot cos(\phi)}{v \cdot cos(\theta)}$$

Ahora usando que $y(t') = -d \cdot sin(\phi)$, entonces tenemos que:

$$-d\cdot sin(\phi)=y(t')=v\cdot sin(\theta)\cdot\frac{d\cdot cos(\phi)}{v\cdot cos(\theta)}-\frac{g}{2}\cdot\left(\frac{d\cdot cos(\phi)}{v\cdot cos(\theta)}\right)^2=tan(\theta)\cdot cos(\phi)\cdot d-\frac{g}{2}\cdot\frac{d^2\cdot cos^2(\phi)}{v^2\cdot cos^2(\theta)}$$

$$-d\cdot sin(\phi)=tan(\theta)\cdot cos(\phi)\cdot d-\frac{g}{2}\cdot\frac{d^2\cdot cos^2(\phi)}{v^2\cdot cos^2(\theta)}$$

Como $d\neq 0$, entonces:

$$-sin(\phi)=tan(\theta)\cdot cos(\phi)-\frac{g}{2}\cdot\frac{d\cdot cos^2(\phi)}{v^2\cdot cos^2(\theta)}$$

De este modo:

$$d=\frac{2v^2cos^2(\theta)[tan(\theta)\cdot cos(\phi)+sin(\phi)]}{g\cdot cos^2(\phi)}=\frac{2v^2\cdot[cos(\phi)\cdot sin(\theta)\cdot cos(\theta)+cos^2(\theta)\cdot sin(\phi)]}{g\cdot cos^2(\phi)}$$

$$d=\frac{2v^2\cdot[cos(\phi)\cdot sin(\theta)\cdot cos(\theta)+cos^2(\theta)\cdot sin(\phi)]}{g\cdot cos^2(\phi)}$$

Ahora, recordemos que: $2\cdot sin(\theta)\cdot cos(\theta)=sin(2\theta)\ \Rightarrow\ sin(\theta)\cdot cos(\theta)=\frac{sin(2\theta)}{2}$, y que $cos^2(\theta)=\frac{1+cos(2\theta)}{2}$

Así tenemos que:

$$d=\frac{2v^2\cdot[cos(\phi)\cdot sin(\theta)\cdot cos(\theta)+cos^2(\theta)\cdot sin(\phi)]}{g\cdot cos^2(\phi)}=\frac{2v^2\cdot[cos(\phi)\cdot\left(\frac{sin(2\theta)}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{cos(2\theta)}{2}\right)\cdot sin(\phi)]}{g\cdot cos^2(\phi)}$$

$$=\frac{v^2}{g\cdot cos^2(\phi)}\cdot[cos(\phi)\cdot sin(2\theta)+cos(2\theta)\cdot sin(\phi)+sin(\phi)]$$

Finalmente, tenemos que la distancia es:

$$\boxed{d=\frac{v^2}{g\cdot cos^2(\phi)}\cdot[cos(\phi)\cdot sin(2\theta)+cos(2\theta)\cdot sin(\phi)+sin(\phi)]}$$

Problema 61.
Considere el mismo problema analizado anteriormente. Determine cual es el angulo optimo de salto, considerando que el esquiador quiere saltar lo más lejos posible.

Solución:
Notemos que lo que queremos maximizar es la distancia en función de θ, y además que $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ y que también $0\leq\phi\leq\frac{\pi}{2}$

Así tenemos que:

$$d(\theta)=\frac{v^2}{g\cdot cos^2(\phi)}\cdot[cos(\phi)\cdot sin(2\theta)+cos(2\theta)\cdot sin(\phi)+sin(\phi)]$$

Ahora calcularemos la derivada de la distancia respecto a θ

$$d'(\theta) = \frac{v^2}{g \cdot cos^2(\phi)} \cdot [2 \cdot cos(\phi) \cdot cos(2\theta) - 2 \cdot sin(2\theta) \cdot sin(\phi)]$$

Ahora debemos calcular el θ^* tal que $d'(\theta^*) = 0$, de este modo tenemos que resolver:

$$0 = d'(\theta^*) = \frac{v^2}{g \cdot cos^2(\phi)} \cdot [2 \cdot cos(\phi) \cdot cos(2\theta^*) - 2 \cdot sin(2\theta^*) \cdot sin(\phi)]$$

Esto es equivalente a hacer que:

$$cos(\phi) \cdot cos(2\theta^*) - sin(2\theta^*) \cdot sin(\phi) = 0$$

$$cos(\phi) \cdot cos(2\theta^*) = sin(2\theta^*) \cdot sin(\phi)$$

$$\frac{cos(\phi)}{sin(\phi)} = \frac{sin(2\theta^*)}{cos(2\theta^*)}$$

$$cot(\phi) = tan(2\theta^*)$$

$$\theta^* = \frac{tan^{-1}(cot(\phi))}{2}$$

Como $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, entonces debemos ver cual de los siguientes 3 valores es más grande: $d(0)$, $d\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y $d(\theta^*)$, y de esta manera se obtendrá el optimo.

$$d(0) = \frac{v^2}{g \cdot cos^2(\phi)} \cdot [cos(\phi) \cdot sin(0) + cos(0) \cdot sin(\phi) + sin(\phi)] = \frac{v^2}{g \cdot cos^2(\phi)} \cdot [sin(\phi) + sin(\phi)]$$

$$d\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \frac{v^2}{g \cdot cos^2(\phi)} \cdot [cos(\phi) \cdot sin(\pi) + cos(\pi) \cdot sin(\phi) + sin(\phi)] = \frac{v^2}{g \cdot cos^2(\phi)} \cdot [-sin(\phi) + sin(\phi)] = 0$$

$$d(\theta^*) = \frac{v^2}{g \cdot cos^2(\phi)} \cdot [cos(\phi) \cdot sin(2\theta^*) + cos(2\theta^*) \cdot sin(\phi) + sin(\phi)]$$

Es por esto que debemos determinar $sin(2\theta^*)$ y $cos(2\theta^*)$

$sin(2\theta^*) = sin(tan^{-1}(cot(\phi)))$

Sea $x = cot(\phi)$, entonces:

$sin(2\theta^*) = sin(tan^{-1}(x))$

Sea $\alpha = tan^{-1}(x)$, entonces:

$sin(2\theta^*) = sin(\alpha)$

Como $\alpha = tan^{-1}(x)$, entonces $tan(\alpha) = x \;\Rightarrow\; 1 + tan^2(\alpha) = x^2 + 1 \;\Rightarrow\; sec^2(\alpha) = x^2 + 1$

$\Rightarrow\; sec(\alpha) = \sqrt{x^2+1} \;\Rightarrow\; cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Ahora utilizando que $cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1$, entonces tenemos que:

$$sin^2(\alpha) = 1 - cos^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1}$$

De este modo:

$$sin(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Así tenemos que:

$$sin(2\theta^*) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{cot(\phi)}{\sqrt{cot^2(\phi)+1}} = \frac{cot(\phi)}{\sqrt{csc^2(\phi)}} = \frac{cot(\phi)}{csc(\phi)} = sin(\phi) \cdot \frac{cos(\phi)}{sin(\phi)} = cos(\phi)$$

De este modo:

$$\boxed{sin(2\theta^*) = cos(\phi)}$$

Ahora:

$$cos(2\theta^*) = cos(tan^{-1}(cot(\phi)))$$

Sea $x = cot(\phi)$, entonces:

$$cos(2\theta^*) = cos(tan^{-1}(x))$$

Sea $\alpha = tan^{-1}(x)$, entonces:

$$cos(2\theta^*) = cos(\alpha)$$

Como $\alpha = tan^{-1}(x)$, entonces $tan(\alpha) = x \;\Rightarrow\; 1 + tan^2(\alpha) = x^2 + 1 \;\Rightarrow\; sec^2(\alpha) = x^2 + 1$

$$\Rightarrow\; sec(\alpha) = \sqrt{x^2+1} \;\Rightarrow\; cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

De este modo:

$$cos(2\theta^*) = cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{cot^2(\phi)+1}} = \frac{1}{\sqrt{csc^2(\phi)}} = \frac{1}{csc(\phi)} = sin(\phi)$$

Así tenemos que:

$$\boxed{cos(2\theta^*) = sin(\phi)}$$

De este modo:

$$d(\theta^*) = \frac{v^2}{g \cdot cos^2(\phi)} \cdot [cos(\phi) \cdot sin(2\theta^*) + cos(2\theta^*) \cdot sin(\phi) + sin(\phi)]$$

$$= \frac{v^2}{g \cdot cos^2(\phi)} \cdot [cos(\phi) \cdot cos(\phi) + sin(\phi) \cdot sin(\phi) + sin(\phi)] = \frac{v^2}{g \cdot cos^2(\phi)} \cdot [cos^2(\phi) + sin^2(\phi) + sin(\phi)] = \frac{v^2}{g \cdot cos^2(\phi)} \cdot [1 + sin(\phi)]$$

Ahora comparamos:

$$d(0) = \frac{v^2}{g \cdot cos^2(\phi)} \cdot [sin(\phi) + sin(\phi)]$$

$$d\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$d(\theta^*) = \frac{v^2}{g \cdot cos^2(\phi)} \cdot [1 + sin(\phi)]$$

Ahora claramente $d(\theta^*)$ es el valor más alto, por lo tanto, el valor optimo es:

$$\boxed{\theta = \frac{tan^{-1}(cot(\phi))}{2}}$$

Problema 62.
Considere el mismo caso estudiado anteriormente. Demuestre que $\theta = \frac{tan^{-1}(cot(\phi))}{2}$ se puede escribir como: $\frac{tan^{-1}(cot(\phi))}{2} = a \cdot \phi + b$, y determine los valores de a y b.

Hint: Notemos que podemos definir: $f(\phi) = \frac{tan^{-1}(cot(\phi))}{2}$, y podemos obtener a haciendo que: $\dfrac{df}{d\phi} = a$, y que además podemos usar algún ángulo para reemplazar en $f(\phi)$ y así determinar b.

Solución:
Sea $f(\phi) = \frac{tan^{-1}(cot(\phi))}{2}$

$$\frac{df}{d\phi} = \frac{d}{d\phi}(\tfrac{tan^{-1}(cot(\phi))}{2}) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{d}{d\phi}(tan^{-1}(cot(\phi))) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{d}{dcot(\phi)}[tan^{-1}(cot(\phi))]\cdot\frac{dcot(\phi)}{d\phi} = -\frac{1}{2}csc^2(\phi)\cdot\frac{d}{dcot(\phi)}[tan^{-1}(cot(\phi))]$$

Ahora, calculamos $\dfrac{d}{dcot(\phi)}[tan^{-1}(cot(\phi))]$, usando que $u = cot(\phi)$, así tenemos que:

$$\frac{d}{dcot(\phi)}[tan^{-1}(cot(\phi))] = \frac{d}{du}[tan^{-1}(u)] = \frac{1}{u^2+1} = \frac{1}{cot^2(\phi)+1} = \frac{1}{csc^2(\phi)}$$

Así, tenemos que:

$$\frac{df}{d\phi} = -\frac{1}{2}csc^2(\phi)\cdot\frac{d}{dcot(\phi)}[tan^{-1}(cot(\phi))] = -\frac{1}{2}csc^2(\phi)\cdot\frac{1}{csc^2(\phi)} = -\frac{1}{2}$$

De este modo:

$$a = -\frac{1}{2}$$

Así tenemos que:

$$f(\phi) = \frac{tan^{-1}(cot(\phi))}{2} = -\frac{\phi}{2} + b$$

Ahora usemos $\phi = \frac{\pi}{4}$

$$f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{tan^{-1}(cot(\frac{\pi}{4}))}{2} = \frac{tan^{-1}(1)}{2} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}$$

Ahora, por otro lado:

$$f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = -\frac{\frac{\pi}{4}}{2} + b = -\frac{\pi}{8} + b$$

Usando que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$, entonces:

$$-\frac{\pi}{8} + b = \frac{\pi}{8}$$

Así tenemos que: $b = \frac{\pi}{4}$, así finalmente tenemos que:

$$\boxed{\theta = \frac{tan^{-1}(cot\,(\phi))}{2} = -\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}}$$

Problema 63.
Considere el mismo problema analizado anteriormente. De una expresión para la distancia optima utilizando la expresión obtenida anteriormente.

Solución:

$$d(\theta) = \frac{v^2}{g \cdot cos^2(\phi)} \cdot \left[cos(\phi) \cdot sin\left(2 \cdot \left[-\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right]\right) + cos\left(2 \cdot \left[-\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right]\right) \cdot sin(\phi) + sin(\phi)\right]$$

$$= \frac{v^2}{g \cdot cos^2(\phi)} \cdot \left[cos(\phi) \cdot sin\left(-\phi + \frac{\pi}{2}\right) + cos\left(-\phi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot sin(\phi) + sin(\phi)\right]$$

Ahora nos centraremos en calcular: $sin\left(-\phi + \frac{\pi}{2}\right)$ y $cos\left(-\phi + \frac{\pi}{2}\right)$

$sin\left(-\phi + \frac{\pi}{2}\right) = sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot cos(\phi) - cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot sin(\phi) = cos(\phi)$

Así:

$$\boxed{sin\left(-\phi + \frac{\pi}{2}\right) = cos(\phi)}$$

Ahora:

$cos\left(-\phi + \frac{\pi}{2}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot cos(\phi) + sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot sin(\phi) = sin(\phi)$

Así:

$$\boxed{cos\left(-\phi + \frac{\pi}{2}\right) = sin(\phi)}$$

Finalmente tenemos que:

$$d(\theta) = d\left(-\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{v^2}{g \cdot cos^2(\phi)} \cdot \left[cos(\phi) \cdot sin\left(-\phi + \frac{\pi}{2}\right) + cos\left(-\phi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot sin(\phi) + sin(\phi)\right]$$

$$= \frac{v^2}{g \cdot cos^2(\phi)} \cdot [cos(\phi) \cdot cos(\phi) + sin(\phi) \cdot sin(\phi) + sin(\phi)] = \frac{v^2}{g \cdot cos^2(\phi)} \cdot [cos^2(\phi) + sin^2(\phi) + sin(\phi)]$$

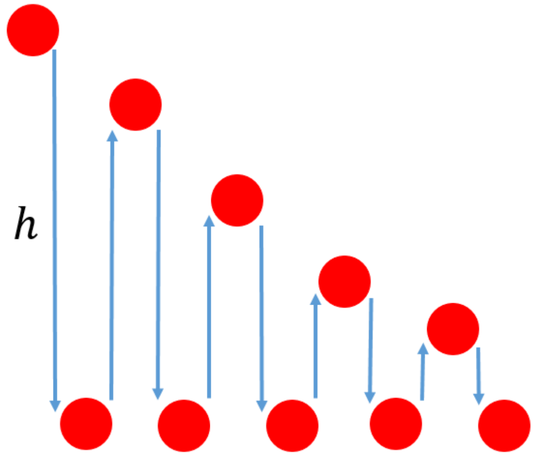
$$= \frac{v^2}{g \cdot cos^2(\phi)} \cdot [1 + sin(\phi)] =$$

Así finalmente tenemos que, la distancia optima es:

$$\boxed{d = \frac{v^2}{g \cdot cos^2(\phi)} \cdot [1 + sin(\phi)]}$$

Problema 64.
Considere una pelota que se suelta desde una altura h. En cada rebote su velocidad se ve reducida en un factor $0 < k < 1$, es decir:

$$|v_{ascenso}| = k \cdot |v_{descenso}|$$



Determine cuanta distancia recorre la pelota.

Solución:
Notemos que la ecuación de movimiento para la pelota en el primer rebote esta dada por:

$$y(t) = h - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

De este modo sea t' el tiempo en que la pelota llega al suelo, tenemos que: $y(t') = 0$. De este modo:

$$0 = y(t') = h - \frac{g}{2} \cdot (t')^2$$

De este modo:

$$t' = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

Además tenemos que la distancia recorrida hasta que toca el piso es $h_0 = h$

Además de esto, la velocidad en función del tiempo desde que se suelta la pelota hasta que cae el piso esta dada por:

$$v(t) = -g \cdot t$$

De este modo, la pelota llega con velocidad $v(t')$ al suelo. De este modo:

$$v(t') = -g \cdot t' = -g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{g} \cdot \sqrt{g} \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot h}}{\sqrt{g}} = -\sqrt{2gh}$$

De este modo: $|v_0| = \sqrt{2gh}$

Así tenemos que la velocidad en el $i - esimo$ rebote estará dada por:

$|v_i| = k \cdot |v_{i-1}| = k^2 \cdot |v_{i-2}| = ... = k^i \cdot |v_0| = k^i \cdot \sqrt{2gh}$

Así tenemos que:

$|v_i| = k^i \cdot \sqrt{2gh}$

$h_0 = h$

$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Ahora consideremos el $i-esimo$ salto en donde la pelota sale desde el suelo con un velocidad $|v_i|$. Así tenemos que su ecuación de movimiento esta dada por:

$$y_i(t) = |v_i| \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Y su ecuación de velocidad esta dada por:

$$v_i(t) = |v_i| - g \cdot t_i$$

Calcularemos el tiempo en que alcanza su altura máxima t_i, es decir que: $v_i(t_i) = 0$

De este modo:

$$0 = v_i(t_i) = |v_i| - g \cdot t_i$$

Así tenemos que:

$t_i = \dfrac{|v_i|}{g}$

Y la altura máxima estaría dada por: $y_i(t_i) = h_i$

De este modo:

$$h_i = y_i(t_i) = |v_i| \cdot t_i - \frac{g}{2} \cdot t_i^2 = |v_i| \cdot \frac{|v_i|}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{|v_i|^2}{g^2} = \frac{|v_i|^2}{2g}$$

En resumen, tenemos que:

$$\boxed{t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}} \quad \boxed{h_0 = h} \quad \boxed{|v_i| = k^i \cdot \sqrt{2gh}} \quad \boxed{t_i = \frac{|v_i|}{g}} \quad \boxed{h_i = \frac{|v_i|^2}{2g}}$$

Notemos que para calcular la distancia total recorrida debemos contar la distancia recorrida al subir y al bajar.

Sea H la distancia total recorrida, entonces tenemos que:

$$H = h + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} h_i = h + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|v_i|^2}{2g} = h + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(k^i \cdot \sqrt{2gh})^2}{2g} = h + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(k^2)^i \cdot 2gh}{2g}$$

$$= h + 2h \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (k^2)^i = h + 2h \cdot \left[\sum_{i=0}^{\infty} (k^2)^i - 1\right] = h + 2h \cdot \left[\frac{1}{1-k^2} - 1\right] = h + 2h \cdot \left(\frac{k^2}{1-k^2}\right)$$

$$= h \cdot \left(1 + \frac{2k^2}{1-k^2}\right) = h \cdot \left(\frac{1-k^2}{1-k^2} + \frac{2k^2}{1-k^2}\right) = h \cdot \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)$$

Finalmente, la distancia recorrida es:

$$\boxed{H = h \cdot \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)}$$

Problema 65.
Considere el ejercicio analizado anteriormente. ¿Cuanto tiempo demora en detenerse la pelota?

Solución:
Podemos calcular el tiempo total que se demora la pelota al detenerse utilizando los datos que se obtuvieron en el ejercicio anterior. Se debe notar que se debe contar el tiempo de subida y de bajada.

Sea T el tiempo total que se demora hasta detenerse, tenemos que:

$$T = t_0 + 2\cdot\sum_{i=1}^{\infty} t_i = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|v_i|}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{2}{g}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}|v_i| = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{2}{g}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}k^i\cdot\sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{2\cdot\sqrt{2gh}}{g}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}k^i$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}k^i = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot\left[\sum_{i=0}^{\infty}k^i - 1\right] = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot\left[\frac{1}{1-k} - 1\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot\left[\frac{k}{1-k}\right] = \sqrt{\frac{2h}{g}}\left[1 + \frac{2k}{1-k}\right] = \sqrt{\frac{2h}{g}}\left[\frac{1+k}{1-k}\right]$$

Finalmente tenemos que el tiempo total que demora en detenerse es:

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1+k}{1-k}\right)}$$

Problema 66.
Considere el mismo problema analizado anteriormente. Calcule la velocidad media de la pelota.

Solución:
Tenemos que:

$$H = h \cdot \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)$$

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1+k}{1-k}\right)$$

Y la velocidad media estará dada por: $\bar{v} = \frac{H}{T}$

De este modo:

$$\bar{v} = \frac{H}{T} = \frac{h \cdot \left(\dfrac{1+k^2}{1-k^2}\right)}{\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\dfrac{1+k}{1-k}\right)} = \frac{\sqrt{g} \cdot \sqrt{h} \cdot \sqrt{h}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{h}} \cdot \frac{(1+k^2)(1-k)}{(1-k^2)(1+k)} = \sqrt{\frac{gh}{2}} \cdot \frac{(1+k^2)(1-k)}{(1-k)(1+k)(1+k)} = \sqrt{\frac{gh}{2}} \cdot \frac{(1+k^2)}{(1+k)^2}$$

Así finalmente tenemos que la velocidad media es:

$$\boxed{\bar{v} = \sqrt{\frac{gh}{2}} \cdot \frac{(1+k^2)}{(1+k)^2}}$$

Referencias

Los ejercicios e imágenes se obtuvieron de las siguientes fuentes:

1. CÁDIZ, *Mecánica Clásica - Ejercicios Resueltos*
2. YOUNG & FREEDMAN, *Física Universitaria - Volumen 1*
3. Instituto de Física UC, *Pruebas del curso Estática y Dinámica de años anteriores*
4. SERWAY & JEWETT, *Física para ciencia e ingeniería - Volumen 1, Segunda edición*